Probabilidades y Estadística para Matemáticos

Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Probabilidades y Estadística
2^{do}. Cuatrimestre 2020
Licenciatura en Matemática

Trabajo Práctico N°5: Esperanza de Variables Aleatorias o Valor Esperado.

Consigna general: justificar apropiadamente todos los pasos realizados en el desarrollo de los ejercicios, a fin de que la resolución de los mismos sea completa, fundamentada con diversos argumentos, que se acepten en su socialización con los participantes del cursado e institucionalización matemática.

Ejercicio 1

1. Bosqueje gráficas de las siguientes variables aleatorias y de sus respectivas funciones de probabilidad f_X y de distribución F_X. Hallar $E(X)$ y $V_{ar}(X)$.

   a) $X \sim I_A$, $\forall A \subset \mathbf{R}$ b) $X \sim Bi(1,p)$.

2. Construya una tabla en la que se muestre un resumen de: El valor esperado o media, la varianza, la asimetría, si es posible, de las v.a.: Binomial, Exponencial, $Un(a,b)$, Normal, Cauchy, Poisson.

Ejercicio 2 Fenómenos como los tiempos de espera y los tiempos de falla de equipo se modelan, en general por medio de, funciones de densidad de probabilidad que decrecen en forma exponencial. Determine la forma exacta de tal función

1. Encuentre el valor de c para que la función f_T resulte una función de densidad de probabilidad (distribución exponencial) para el caso

$$f_T(t) = \begin{cases} c\ e^{-ct} & t \geq 0 \\ 0 & c.o.c \end{cases}$$

2. Encuentre la esperanza matemática de la distribución exponencial. Reescriba la expresión de la función de densidad f_T en función de $E(T)$.

3. El tiempo de espera en la fila de cierto banco se modela mediante una función de densidad exponencial con media de 8 minutos. Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido en los primeros 3 minutos?

Ejercicio 3 Considere la siguiente situación:

Un señor tiene un llavero con n llaves. Ha olvidado cuál es la de su casa, y las prueba ordenadamente una por una. Cuál es la probabilidad de acertar en el k-ésimo intento ($1 \leq k \leq n$). Considerar dos casos: cuando hay reposición de llaves, y cuando no la hay.

En base a la situación anterior:

a) Sea T el número de intentos que necesita realizar el señor para abrir la puerta, calcule la ET.

b) Suponga que dicho señor está totalmente borracho y en cada intento vuelve a elegir una llave al azar de entre las n. Calcular ET y comparar con el resultado obtenido en el inciso anterior. Puede extraer conclusiones sobre los beneficios de la sobriedad.

Ejercicio 4 Las puntuaciones del cociente intelectual (CI) tienen una distribución $CI \sim N(100, 15)$

a) Dé el valor esperado, la varianza y la desviación estandar de la v.a. CI.

b) Qué porcentaje de la población tiene una puntuación de CI entre 85 y 115?

c) Qué porcentaje de la población tiene un CI arriba de 140?

Ejercicio 5 Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, asociado a un experimento aleatorio ε. Sea X variable aleatoria, tal que, $E(X) = \mu$. Sea $c \in \mathbf{R}$, entonces, si $E(X-c)^2 < \infty$ $\forall \epsilon > 0$, entonces

- $$P\left(\mid X - c \mid \geq \epsilon\right) \leq \frac{V_{ar}(X)}{\epsilon^2} \tag{1}$$

- $$P\left(\mid X - \mu \mid \geq k\,\sigma\right) \leq k^{-2} \tag{2}$$

Pruebe y explique la interpretación de los resultados obtenidos en cada item.

Ejercicio 6 Considere los siguientes items y calcule o de una respuesta, según corresponda.

- Calcular $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$, con $X \sim P_o(\lambda)$
- Se cumple que la expresión anterior es igual a $\frac{1}{1+EX}$?
- Es posible calcular la expresión del primer item para una v.a. $Un(0,1)$?

Ejercicio 7 i) Exprese condiciones y demuestre en base a que, $E(X) = \displaystyle\int_{-0}^{+\infty} P(X \geq x)\,dx$, se cumple, $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

ii) Justifique para el caso continuo, porqué, $\forall x \in \mathbf{R}$, se cumple que,

$$E(X) = \int_{-0}^{+\infty} P(X \geq x)\,dx = E(X) = \int_{-0}^{+\infty} P(X > x)\,dx$$

Ejercicio 8 Demuestre la siguiente proposición: Sea X una variable aleatoria y suponga que $E(X)$, existe, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, entonces,

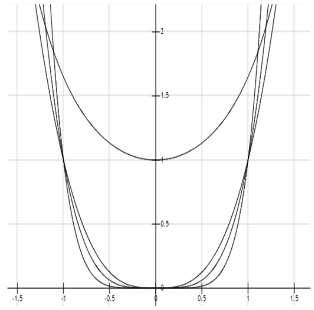
1. $V_{ar}(X) \geq 0$
2. $V_{ar}(aX + b) = a^2 V_{ar}(X)$
3. $V_{ar}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
4. $\forall a, V_{ar}(X), minimiza, E\left((X-a)^2\right)$
5. Si X, Y son v.a. independientes, entonces, $V_{ar}(X+Y) = V_{ar}(X) + V_{ar}(Y)$

Escriba una conclusión, para el caso particular, $a = \mu = E(X)$, del item 4.

Ejercicio 9 Complemente la tabla del Ejercicio 1. Calcular, si es posible, E(X), Varianza, de las distribuciones:

a) Geométrica, b) Hipergeométrica c) Weibull.

Ejercicio 10 Si X es una v.a. normal típica o unitaria: Pruebe que existe $E|X|^k$, siendo $k > 0$. (sugerencia: use la acotación $\mid X \mid^k < e^{\frac{x^2}{2}}$ para x perteneciente a algún subconjunto real. Verifique numéricamente tal acotación. Grafique ambas funciones, puede usar graficador, por ejemplo, fooplot.com para obtener una gráfica como la de la Figura. O bien pruebe la desigualdad analíticamente.)



Algunas gráficas $\mid X \mid^k < e^{\frac{x^2}{2}}$

Ejercicio 11 Muestre que

1. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al valor medio μ y si el tercer momento central existe, i.e. $E[(X-\mu)^3] < \infty$, entonces, $E[(X-\mu)^3] = 0$
2. El recíproco de 1 no se cumple.

Ejercicio 12 Considere la siguiente función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, $f(x) = xe^{-x}\ Si\, x \geq 0$ y $f(x) = 0$ en c.o.c.

1. Bosqueje la misma.
2. Estudie la asimetría utilizando el sesgo de la variable aleatoria.
3. En base al valor del sesgo explique cómo es la cola de la distribución.

Ejercicio 13

1. Demostrar que el coeficiente de correlación ρ cumple la condición $\mid \rho \mid \leq 1$
2. Sea X una variable aleatoria que toma los valores -1, 0 y 1, con probabilidad igual a $\frac{1}{3}$. Sea la variable aletoria $Y = X^2$. Muestre que X e Y, están correlacionadas pero no son independientes.

Ejercicio 14 Sea $Y = X^2$ donde $X \sim N(0, 1)$. Probar que X e Y son incorreladas pero no independientes.

Bibliografía Sugerida para el desarrollo del práctico

1 Ricardo Maronna. Probabilidad y Estadística Elementales para estudiantes de Ciencias. Editorial Facultad de Cs Exactas, Universidad Nacionla de La Plata. Argentina. 1995.

2 Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addison Wesley Longman, 1998.

3 George Canavos. Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. Mc Graw Hill, 1988.

4 William Feller. Introducción a la Teoría de las Probabilidades y sus Aplicaciones, Vol. I y II. Limusa Wiley, 1978.

J.C.R. 2020

Profesor Responsable Cátedra PyEpM