Universidad Nacional de Salta | Medida e Integración

Facultad de Ciencias Exactas | 2^{do}. Cuatrimestre 2020

Departamento de Matemática | **Licenciatura en Matemática**

Primer Examen Parcial

09/12/2020

Apellido/s Nombre/s : .... DNI.............. LU..............

Evaluación	AE 1	P1	RP1	AE2	P2	RP2

1. Muestre que

   $l = \liminf_{k\to\infty} a_k$, si y solo sí, i) Existe una subsucesión $\{a_{k_j}\}$ de la sucesión $\{a_k\}$, la cual converge a l y ii) $l' < l$, existe un entero K, tal que $a_k > l'$ para todo $k \geq K$.

2. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) E es medible Lebesgue (según Carathéodory)

   b) $\forall \varepsilon > 0$,existe un conjunto abierto $E \subset G$ con $|G - E|_e \leq \varepsilon$

   c) Existe un conjunto $E \subset H$ del tipo G_δ tal que $|H - E|_e = 0$.

3. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales en $\mathbb{R}$. Demostrar que:

   a) $\mathbb{Q}$ tiene medida nula.

   b) $\mathbb{Q}$ es un conjunto del tipo F_σ.

   c) Existe un conjunto G del tipo G_δ tal que $\mathbb{Q} \subset G$ y $|G| = 0$

4. Si $f : E \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ es una función tal que el conjunto $\{x \in E : \ f(x) > k\}$ es medible $\forall k \in \mathbb{Q}$. Probar que f es medible.

5. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[a, b]$ y suponga que $f_n \to f$ a.e. en $[a, b]$, tal que f es finita. Demostrar que, dado un $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{E_k\}$ de conjuntos medibles, donde $\{| \ f - f_m \ | < \varepsilon\}$ $\forall m > k$ y además que el conjunto $| \ [a, b] - E_k \ | \to 0$.