Probabilidades y Estadística para Matemáticos

Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Probabilidades y Estadística
2^{do}. Cuatrimestre 2020
Licenciatura en Matemática

Trabajo Práctico N°3: Variables Aleatorias

Consigna general: justificar apropiadamente todos los pasos realizados en el desarrollo de los ejercicios, a fin de que la resolución de los mismos sea completa, fundamentada con diversos argumentos, que se acepten en su socialización con los participantes del cursado e institucionalización matemática.

Ejercicio 1 Analice las siguientes situaciones en un determinado espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, asociado a un experimento aleatorio ε y para cada una de ellas,

- Defina una variable aleatoria adecuada.
- Indique e recorrido R_X de la variable aleatoria y clasifíquela si es posible.
- Indique, si es posible, la probabilidad inducida P_X, sobre el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$.

1. Se lanzan dos monedas equilibradas y se quiere analizar el número de *cecas*
2. Se lanzan dos dados legales de seis caras. Interesa observar la suma de los resultados obtenidos.
3. Se lanzan dos dados legales y se registra la diferencia en valor absoluto de las caras que quedan hacia arriba.
4. Se lanza una moneda al aire con probabilidad $P(\{\text{'sale cara'}\})=p$. Sea N el número de lanzamientos hasta obtener por primera vez cara.

Ejercicio 2 Clasifique las siguientes variables aleatorias, en caso de que no se indique la v.a. X, defina una adecuada.

1. $X : \Omega \to \mathbf{R}$, tal que $\mathbf{R}_X = [a, b]$, con $a, b \in \mathbf{R}$.
2. Un cuadrado de área 4 dm^2, se usa como blanco para tiros. Interesa estudiar dar en el blanco o la cercanía del impacto al centro.
3. Se estudia la duración una lámpara led, elegida al azar, en funcionamiento bajo ciertas condiciones. Interesa analizar el tiempo de vida de la misma y se precisa si la duración resulta entre 3 meses y 6 meses.

Ejercicio 3 Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espacio de probabilidad asociado al experimento aleatorio ε. Para los items siguientes, considere una X una variable aleatoria (v.a. X) que tenga en cuenta las especificaciones indicadas. Escriba con precisión la expresión correspondiente a F_X, la función de distribución acumulada (FD) y grafique la misma.

1. Que contemple las situaciones descriptas en los ítems del **Ejercicio 1**
2. Tal que, su función de masa de probabilidad sea dada por, $p(1) = \frac{1}{2}, p(2) = \frac{1}{3}, p(3) = \frac{1}{6}$.

Ejercicio 4 Demostrar las propiedades de F, la función de distribución (FD) de una v.a. X, enunciadas en los siguientes ítems.

1. $\lim_{n \to \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{n \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = \lim_{t \to x+} F(t) - \lim_{t \to x-} F(t)$ (el salto de F en x)

3. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \text{lím}_{t \to x+} F(t)$ (continuidad por la derecha)

Ejercicio 5 Para los siguientes ítems hallar la función de cuantía (o función de frecuencia o función de masa de probabilidad) y la función de distribución, exprésela con precisión (siempre y cuando sea posible)

a) Variable aleatoria Uniforme discreta en el intervalo natural $[n, m]_N$.
b) Una lámpara led colocada en un portalámpara común, tiene una probabilidad de $0,2$ de funcionar más de 500 hs. Si se testean 20 lámparas similares ¿ Cuál es la probabilidad de que exactamente x de ellas tengan un periodo de vida mayor de 500 hs?.
c) Variable aleatoria Poisson.

En cada caso, indique lo que mide la variable utilizada, el recorrido de las mismas y los parámetros característicos.

Ejercicio 6

1. Determinar la constante c tal que $f(x) = ce^{-\frac{x}{2}}$, si $x > 0$ y $f(x) = 0$ c.o.c. sea una función de densidad.

2. Determinar la constante c tal que $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ sea una función de densidad. (En este caso la densidad hallada pertences a una familia de distribuciones denominada de Cauchy.)

3. Para los ítems anteriores calcular la correspondiente función de distribución acumulativa F.

Ejercicio 7:
a) Calcular la función de distribución de una v.a. de tipo $Un(a, b)$
b) Sea Z la longitud de los intervalos $(0, U)$ o $(U, 1)$ que contenga al punto 0,5. Calcular D(Z).

Ejercicio 8 El diámetro de los caracoles del paraje Tres Palmeras, Salta, es una v.a. X cuya densidad viene dada por $f(x) = kx(5 - x)I(0 < x < 5)$, con $c = cte$. Determine la constante c. Grafique la función f. Encuentre F y grafíquela. Halle $P(X = 4), P(\frac{1}{2} < X < 3)$ e interprete ambos valores en las gráficas de las funciones encontradas.

Ejercicio 9

1. Demostrar la validez de las expresiones (3.16),(3.17), del texto Maronna.

2. Sea X una v.a. con fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & c.o.c \end{cases}$$

Sea $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por la asignación $H(x) = 3x + 1$. Hallar fdp de Y=H(X)

Ejercicio 10 Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

1. probar que cualquier transformación lineal de X preserva la normalidad.

2. determinar la distribución de e^x (esta es la denominada distribución log-normal con parámetros μ, σ).

Ejercicio 11 Definir respectivos algoritmos que permitan, a partir de una distribución uniforme continua unitaria, generar muestras correspondientes a las distribuciones:
1) N(0,1), y luego generalizar para una Normal cualquiera
2) De Cauchy
3) Proponga una simplificación del algoritmo para resolver el caso 2) (sugerencia: genere números aleatorios del intervalo $(0, \frac{1}{2})$)

Ejercicio 12 Sea la v.a. $X \sim N(0, 1)$
1) Determinar qué valores pueden tomar las constantes α_1 y α_2 para que se verifique la siguiente igualdad para todo $x \in \mathbb{R}$. Justificar los pasos.

$$\alpha_1 \Phi(x) + \alpha_2 \Phi(-x) = 1$$

2) Simulación Tipo Monte Carlo. Suponga que dispone de una calculadora científica que le permite generar al azar, una muestra del intervalo real $(-\pi, \pi)$. Diseñar un algoritmo que permita generar al azar, usando la calculadora, una muestra de tamaño $n = 7$, de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Justificar todos los pasos seguidos.

Ejercicio 13 1) Se define una distribución uniforme bidimensional sobre el cuadrado $[-1, 1]^2$. Qué forma tiene la densidad en cuestión?.

2) Calcular las densidades marginales.

3) Son las variables X e Y definidas como la coordenadas de un punto elegido al azar del rectángulo, independientes?

4) Graficar la densidad conjunta.

5) Dar ejemplos de sendos sucesos que tengan probabilidad: 0; 0.5; 1/3.

6) Dar un ejemplo de una familia infinita numerable de sucesos tales que la intersección es no vacía, y sin embargo ésta tenga probabilidad nula.

Ejercicio 14 Repita los items 1) y 2) del **Ejercicio** anterior, pero considere una distribución bivariada uniforme en la bola $B(0, 2) \subset \mathbb{R}^2$

Bibliografía Sugerida para el desarrollo del práctico

1 Ricardo Maronna. Probabilidad y Estadística Elementales para estudiantes de Ciencias. Editorial Facultad de Cs Exactas, Universidad Nacionla de La Plata. Argentina. 1995.

2 Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addison Wesley Longman, 1998.

3 George Canavos. Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. Mc Graw Hill, 1988.

4 William Feller. Introducción a la Teoría de las Probabilidades y sus Aplicaciones, Vol. I y II. Limusa Wiley, 1978.

J.C.R. 2020

Profesor Responsable Cátedra PyEpM