Universidad Nacional de Salta | Medida e Integración
Facultad de Ciencias Exactas | 2^{do}. Cuatrimestre 2020
Departamento de Matemática | **Licenciatura en Matemática**

Trabajo Práctico N°3: Medida de Lebesgue

Ejercicio 1

1. Dado un conjunto $G \subset \mathbb{R}$, abierto no acotado, de ejemplos tales que $\mid G \mid_e = +\infty$ y $\mid G \mid < +\infty$
2. Dado $G = \bigcup_1^n \left(n - \frac{1}{2n^2}, n + \frac{1}{2n^2}\right)$. Muestre que $\mid G \mid_e < +\infty$
3. Dado $I \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Muestre que $\mid I \mid_e = \mid I + x_0 \mid_e$

Ejercicio 2 Muestre que

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen medida exterior nula.
2. El conjunto de Cantor tiene medida exterior nula.

Ejercicio 3 Dados los intervalos $I_1 = [a,b], I_2 = (a,b]$ y $I_3 = (a,b)$. Halle $\mid I_i \mid_e,\ i = 1,2,3$.
Ejercicio 4 Sea G un conjunto abierto acotado, tal que $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, donde $\{I_k\}$ es una sucesión de intervalos abiertos acotados. Muestre que existe un entero N tal que $\mid G \mid_e \leq \sum_{k=1}^{N} \mid I_k \mid_e + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$.
Ejercicio 5 Muestre que:

1. Existe un intervalo $\overline{I}$ cerrado tal que $\overline{I} \subset I$ y $v(\overline{I}) \geq v(I) - \epsilon$.
2. Existe un intervalo I' abierto tal que $I \subset I'$ y $v(I') \leq v(I) + \epsilon$.
3. Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo cerrado. Mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe I^* intervalo cerrado en $\mathbb{R}^n$ tal que $I \subset \overset{o}{I^*}$ y $v(I^*) \leq (1+\epsilon).v(I)$
4. Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, $|\partial I|_e = 0$.

Ejercicio 6 Dados los conjuntos $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$. Muestre que

1. Si $\mid E_1 \mid_e = 0$, entonces $\mid E_1 \bigcup E_2 \mid_e = \mid E_2 \mid_e$
2. Si $\mid E_1 \triangle E_2 \mid_e = 0$, entonces $\mid E_1 \mid_e = \mid E_2 \mid_e$
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \mid E_1 \mid_e = \mid E_1 + t \mid_e$

Ejercicio 7 Sea $D_k = [0,1] - C_k$ donde C_k es la unión de los intervalos que quedan en la $k-ésima$ etapa en la construcción del conjunto de Cantor. Entonces D_k consta de $2^k - 1$ intervalos I_j^k a los cuales se los considera ordenados de izquierda a derecha. Sea $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida del siguiente modo: $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = 1$, $f_k(x) = j2^{-k}$ si $x \in I_j^k$ y es lineal en los intervalos C_k. Demostrar:

1. $f_k(x) = f_{k+1}(x)$, $\forall x \in I_j^k$ con $j = 1, 2, ..., 2^k - 1$
2. $\forall k$, $|f_k - f_{k+1}| < \frac{1}{2^k}$
3. $\{f_k\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ (El limite al cual converge esta sucesión se llama función de Cantor).
4. Justifique que la función de Cantor es continua y creciente.
5. Justifique porque puede decirse que el crecimiento es despreciable, sin embargo los valores de $f(x)$ varían de 0 a 1.

Ejercicio 8 Pruebe que para cada conjunto $T \subset \mathbb{R}$ y una colección finita de conjuntos $E_1, E_2, \ldots.., E_n$, mutuamente disjuntos en $\mathbb{R}$, se cumple

$$\left| T \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i \right) \right|_e = \sum_{i=1}^{N} \left| T \bigcap E_i \right|_e$$

Ejercicio 9 Dado un conjunto E, muestre que existe un conjunto H de tipo G_δ, tal que $E \subset H$ y $\mid E \mid_e = \mid H \mid_e$.

Ejercicio 10 Sea $E = \mathbb{Q} \bigcap [0,1]$, sea $\{I_n\}$ una colección finita de intervalos abiertos que cubren E. Muestre que $\mid [0,1] \mid_e = 1 = \mid \overline{E} \mid_e \leq \mid \overline{\bigcup I_n} \mid_e \leq \sum v(\overline{I_n})$

Ejercicio 11 Muestre que los siguientes conjuntos son medibles

1. I, intervalo.
2. $\mathbb{R}$
3. E, tal que $\mid E \mid_e = 0$.
4. $[0,1] - \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor.

Ejercicio 12 Demuestre las siguientes proposiciones.

1. Sea E medible, entonces E^c es medible.
2. Sea E medible y sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $E + x$ es medible.
3. Si E_1 y E_2 son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Probar que $|E_1 \cup E_2| + |E_1 \cap E_2| = |E_1| + |E_2|$
4. Sea $E \subset A$ medible, tal que, $\mid E \mid < +\infty$, entonces $\mid A - E \mid_e = \mid A \mid_e - \mid E \mid$

Ejercicio 13 Pruebe que

1. If $\{I_k\}_{k=1}^{N}$ is a finite collection of nonoverlapping intervals, then $\bigcup I_k$ is measurable and $\mid \bigcup I_k \mid = \sum \mid I_k \mid$
2. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles tal que $|E_1| < \infty$. Si $E_{n+1} \subset E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Probar que $\lim_{n \longrightarrow \infty} |E_n| = |E|$

Ejercicio 14 Muestre que

1. Existen conjuntos no medibles.
2. Any set in $\mathbb{R}$ with positive outer measure contains a nonmeasurable set.

Bibliografía

1. Wheeden & Zygmund. An Introduction to Real Analysis. Pure and Applied Mathematics.
2. Spiegel M. Real Variable and Lebesgue Measure and Integration with Aplications to Fourier Series. Serie Outline Schaum.

J.C.R & E.A.L. 2020