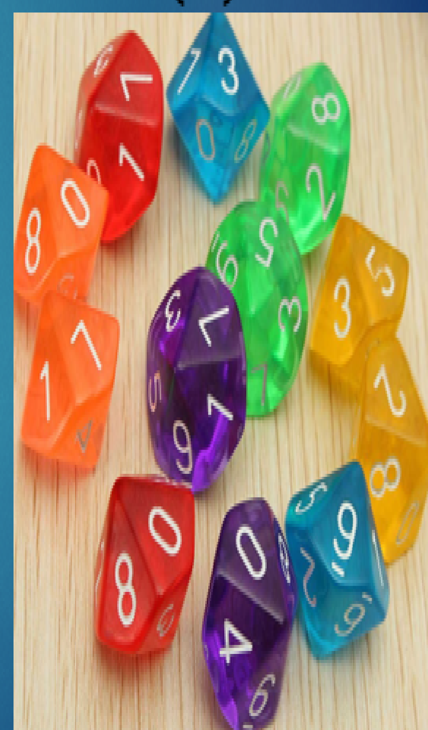
Probabilidades y Estadística para matemáticos

$P(A)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Probabilidades y Estadística
2^{do}. Cuatrimestre 2020
Licenciatura en Matemática

Trabajo Práctico N°2: Probabilidad Condicional e Independencia. Teorema de Bayes. Proceso Poisson.

Consigna general: justificar apropiadamente todos los pasos realizados en el desarrollo de los ejercicios, a fin de que la resolución de los mismos sea completa, fundamentada con diversos argumentos, que se acepten en su socialización con los participantes del cursado e institucionalización matemática.

Ejercicio 1 : Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio ε, con $\mid \Omega \mid = \mid \mathbb{N} \mid$, es decir $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k, ...\}$. Se asigna probabilidades a los sucesos elementales de la siguiente manera: $P(a_k) = c$, con c una constante real.

1) ¿ Está bien asignada esta medida de probabilidad? ¿ Por qué?

2) En caso de que su respuesta sea negativa en el ítem 1), ¿ qué condiciones debería imponer para que la asignación de probabilidades para que esté bien realizada?.

3) Si $P(a_k) = (0{,}2)^{k-1}(0{,}8)$, hallar (si fuera posible, y si no fuera, explicar el por qué) un suceso G de tal que $P(G) > -2$, y otro suceso H tal que $P(H) = 0$, pero $H \neq \emptyset$

4) Sean los sucesos M y N de Ω , con la asignación de probabilidades del ítem 3), y tales que en M viven todos los a_k con k par, y en N, todos los a_k con k impar. ¿ M y N son independientes?, ¿ Son mutuamente excluyentes? ¿ Por qué?

5) Calcular la probabilidad de que dado que ocurre M, ocurra el suceso T, donde este último contiene los puntos muestra con subíndice mayor o igual a 24.

Ejercicio 2 Una tabla de vida es una síntesis de las estadísticas de mortalidad, supervivencia y fecundidad por edad de una población. La siguiente tabla de indica el número de sobrevivientes a las edades que se indican de un grupo de 1023 varones en una determinada población. Estimar la probabilidad que un recién nacido alcance 60 años de edad.

Edad	Sobrevivientes
0	1023
10	253
20	106
30	71
40	43
50	25
60	7
70	3
80	2

¿ Cuál sería la probabilidad de que una persona de 30 años viva hasta los 60 años? ¿ Discuta los valores estimados. ¿ Qué puede concluir acerca de lo estimado?

Ejercicio 3 Los sistemas que se presentan en la Figura 1, se conocen como sistemas de circuitos en serie y en paralelo respectivamente. Cada uno de los interruptores E_i posee una probabilidad p de funcionar y trabajan independientemente. Para cada sistema, indique si los E_i, son mutuamente excluyentes. Determine la probabilidad, en cada caso, para que cada sistema funcione.

Ejercicio 4 Estime la probabilidad para que el sistema paralelo, como el de la Figura 1, pero con n interruptores, funcione.

Ejercicio 5 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $A_1, A_2, ...A_n$ una partición de Ω, dónde $P(A_i) > 0$, para todo i, entonces,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_1^n P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

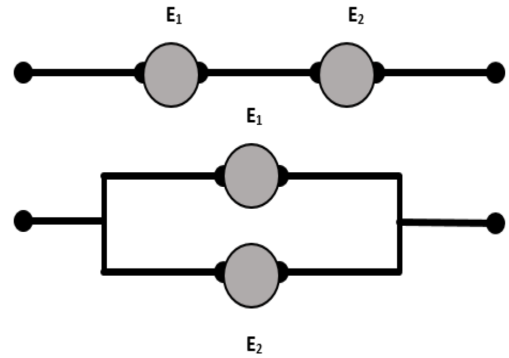


Figura 1: Sistema de conexión en serie y en paralelo

- Justifique el resultado anterior.
- Escriba, explicando intuitivamente, la interpretación, la idea, de la expresión anterior.

Ejercicio 6 La población de peces de una represa, queda determinada por los peces que ingresan por los ríos de montañas, tributarios R_1 y R_2, el ingreso se produce a través de compuertas que no permiten sus regresos a los ríos. Estudios mostraron que el 80 % de la población de peces de la represa la aporta, el tributario R_1 y el 20 % el río R_2, también que, el 7 % de los peces que ingresan del río R_1 están contaminados y del río R_2, el 2 %. Se extrae al azar un pez de la represa, hallar la probabilidad de que el pez, no este contaminado.

Ejercicio 7 En una clínica, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90 % efectivamente lo tenía, mientras que únicamente el 5 % de los no fumadores lo padecía. La proporción de fumadores es 0,45. ¿ Cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer, seleccionado al azar, sea fumador?

Ejercicio 8 El gerente de RR. HH de una empresa, sabe por experiencia que el 90 % de las personas que inician la capacitación de ingreso a la empresa, terminan con éxito. La proporción de personas en capacitación y con experiencia previa es del 10 por 100 que completan con éxito la capacitación y del 25 % de aquellos que no terminan la capacitación. Hallar la probabilidad que una persona con experiencia previa supere la capacitación con éxito.

Ejercicio 9 En los laboratorios del Hospital del Milagro, se realiza un test para detectar SARS-CoV-2-19 con un porcentaje de efectividad del 95 %, cuando efectivamente el virus está presente. Sin embargo, el test resulta un falso positivo en un 1 % de las personas sanas analizadas (esto se interpreta como, si una persona sana es analizada, entonces la probabilidad que resulte calificada con el virus es del 0,01). Si el 60 % de la población de Salta, actualmente posee el virus en cuestión, ¿ cuál es la probabilidad de que una persona sometida al test, sea calificada como positiva, cuándo efectivamente está enferma?

Ejercicio 10 Una caja posee tres monedas con probabilidades 0,4, 0,5 y 0,6 respectivamente. Se extrae una moneda al azar, se arroja 20 veces y se obtienen caras 12 veces. ¿ Cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea la moneda legal?.

Ejercicio 11 Una caja contiene 3 bolas numeradas blancas, 3 bolas negras numeradas y 3 bolas numeradas rayadas. El estado de las bolas rayada 1, negra 2 y blanca 3, es nuevo.

1. Se extrae una bola de la caja. Determine si número, color y estado son independientes.
2. Sean los sucesos $A =$ la bola es negra, $B =$ la bola es la número 2 y $C =$ la bola es nueva. Determine las probabilidades de los sucesos $A, B, C, A \bigcap B$, $A \bigcap C$, $B \bigcap C$ y $A \bigcap B \bigcap C \bigcap$.
3. ¿ Qué puede concluir del ítem 2?

Ejercicio 12 Dadas cuatro bolillas identificadas con aaa, abb, bab, y bba, respectivamente. Se introducen las bolillas en un bolillero, se hace girar el mismo y se extrae una de ellas. Considere los eventos A: *la primera letra de la bolilla extraída es b*; B:*La segunda letra de la bolilla extraída es b* y C:*La tercera letra de la bollilla extraída es b*. Muestre que los eventos son independientes dos en dos. Sin embargo, los tres eventos resultan dependientes

Ejercicio 13: Decidir sobre el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

1) Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia finita de sucesos tales que son independientes de a pares, entonces todos los miembros son independientes.

2) Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia infinita de sucesos tales que son disjuntos de a pares, entonces es imposible que todos los miembros son independientes.

Ejercicio 14:

1) Demostrar que Ω y $\emptyset$ son sucesos independientes de cualquier otro suceso.

2) Si $A \subseteq B$, ¿ pueden ser ambos sucesos, independientes?

3) Si $A \bigcap B = \emptyset$, ¿ pueden ser ambos sucesos, independientes?

Ejercicio 15:

1) Se lanzan 3 dados regulares de 6 caras cada uno, y se anotan las ternas resultantes. Dar un ejemplo de dos sucesos A y B que sean independientes y, otro ejemplo en que no lo sean.

2) El ítem anterior, ¿ es posible que los sucesos sean mutuamente excluyentes e independientes al mismo tiempo?

Ejercicio 16 : Un determinado artículo se fabrica en tres fábricas F_1, F_2 y F_3 la primera produce el doble del artículo que la segunda fábrica y ésta produce la misma cantidad del artículo que la tercera. El porcentaje de producción defectuosa de F_1 y F_2 es del 2 %, mientras que el de F_3 es el 4 %

- Si de todos los artículos producidos se escoge un artículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? ¿ Qué teorema o propiedad fundamental emplea?
- ¿ Cuál es la proporción de los artículos defectuosos proviene de la fábrica F_1? ¿ Qué teorema o propiedad fundamental emplea?

Ejercicio 17 Un departamento de la Universidad posee 100 computadoras. Algunas son portables, $P = 40$ y otras no (N_p). Hay nuevas (N) y viejas, $V = 70$. Portables nuevas hay 10. Se escoge una computadora al azar y se observa que es nueva. ¿ Cuál es la probabilidad de que la computadora sea portable?

Ejercicio 18 Determinados tornillos vienen en cajas de dos tipos A y B. El 40 % de todas las cajas son del tipo B. Las cajas de tipo A poseen 30 % de tornillos defectuosos, mientras que las del tipo B poseen el 70 %. Si se extrae un tornillo sin defectos ¿ cuál es la probabilidad que provenga de cajas del tipo A. En base a lo anterior establezca un orden con respecto a la probabilidad de que provenga de cajas del tipo B.

Ejercicio 19 Una sucesión infinita de ensayos independientes se lleva a cabo de modo asbtracto. Cada ensayo resulta en éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad $(1 - p)$.

Cuál es la probabilidad para que:

i) Al menos 1 éxito ocurra en n ensayos.

ii) Todos los ensayos resultan en éxitos.

Bibliografía Sugerida para el desarrollo del práctico

1 Ricardo Maronna. Probabilidad y Estadística Elementales para estudiantes de Ciencias. Editorial Facultad de Cs Exactas, Universidad Nacionla de La Plata. Argentina. 1995.

2 Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addison Wesley Longman, 1998.

3 George Canavos. Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. Mc Graw Hill, 1988.

4 William Feller. Introducción a la Teoría de las Probabilidades y sus Aplicaciones, Vol. I y II. Limusa Wiley, 1978.

J.C.R. 2020

Profesor Responsable Cátedra PyEpM