Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Medida e Integración
Primer Coloquio

27/11/2020
Alumno:
LU N^o:
email:

No escriba con lápiz. Las demostraciones, justificaciones, deben estar contenidas en el exámen; referencias o comentarios de como podrían hacerse o donde podrían hallarse tales demostraciones o similares no serán considerados. Repuestas sin justificar no recibirá puntaje. Ennumere las hojas, coloque nombres y apellidos en todas las hojas. Firme en la última hoja donde finaliza su exámen. Gracias. Buen trabajo.

1. Obtener el limte superior e inferior de las siguientes sucesiones de conjuntos:
   (a) $\{A_n\}$, donde $A_n = (-n, n), \forall n \in \mathbb{N}$
   (b) $\{B_n\}$, donde $B_n = (-1/n, 1 + 1/n), \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Sea $x_n = 3 + (-1)^n\,(1 + \frac{1}{n})$. Calcular $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$.
3. Probar lo siguiente (Condición uniforme de Cauchy): La sucesión de funciones (f_n) definidas en $S \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ converge uniformemente en S si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que si $n \geq N, m \geq N$ y $s \in S$ entonces $|f_n(s) - f_m(s)| < \varepsilon$.
4. Mostrar que la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.
5. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:
   (a) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad , x \in [0, 1]$
   (b) $g_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad , x \in [0, 2]$)