Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Medida e Integración
2^{do}. Cuatrimestre 2020
Licenciatura en Matemática

Trabajo Práctico N°2: Conceptos elementales en los Espacios Métricos $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1 Dado $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y > x^3\}$. Decida si el conjunto es abierto, cerrado. Halle A' y $\overline{A}$. Justifique en todo los casos.

Ejercicio 2

1. Para $f : (0, 1) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$. Considere la desigualdad $\mid f(x) - f(k) \mid < \frac{1}{3}$ con $k \in (0, 1)$. Sea E_k el conjunto solución de la inecuación anterior. Muestre que $\{E_k\}$ cubre a $(0, 1)$. Es posible cubrir el dominio de f con alguna subfamilia finita de $\{E_k\}$?

2. Sea $E_k = (k - \frac{1}{3}, k + \frac{1}{3})$ con $k = 0, 1, 2, ...$ Muestre que $\{E_k\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\mathbb{N}$. Es posible extraer algún subcubrimiento finito?

3. Dado el conjunto $A = \{1/n : n \in N\}$. Encuentre una colección de abiertos que cubra el conjunto A. Es posible extraer una subcolección finita que cubra a A?

Ejercicio 3 Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de K posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, con límite $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ en K.

Ejercicio 4 Propiedad de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}^n$. Mostrar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si cualquier sucesión de puntos de E admite una subsucesión convergente en E .

Ejercicio 5 El cubo $[a, b]^n$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 6 Demostrar el teorema de Heine-Borel para $\mathbb{R}^n$: *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Ejercicio 7 En cada caso decida, si los conjuntos indicados poseen la Propiedad de Heine-Borel y la propiedad de Bolzano-Weierstrass. Justifique.

1. El intervalo $[0, \infty)$.

2. El intervalo $[0, 2] \bigcup \{6\}$.

3. $\mathbb{Q} \bigcap [0, 1]$

Ejercicio 8 Probar que $\limsup_{k\to\infty} a_k = a$, si y solo si, se cumplen las siguientes dos condiciones.

1. $\alpha < a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \alpha\}$ es infinito.

2. $\beta > a$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n > \beta\}$ es finito.

Ejercicio 9 Sea $\{a_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^*$. Probar que $\lim_{k\to\infty} a_k$ existe si y solo si $\limsup_{k\to\infty} a_k = liminf_{k\to\infty} a_k$.

Ejercicio 10

1. Probar la Propiedad de los Intervalos Encajados: Sea F_k una suseción de conjuntos cerrados y acotados no vacios tales que $F_{k+1} \subset F_k$ parar todo $k = 1, 2, 3....$ Entonces existe al menos un punto en $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$.

2. Dar un ejemplo de una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en R^n cuya intersección sea vacía. ¿ Es cierta la propiedad si reemplazamos compactos no vacios, por abiertos no vacios o por cerrados no vacios.

3. Verificar la propiedad para $F_k = \left[0, \frac{1}{k}\right] \subset \mathbb{R}$, $F_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x \geq 0,\ 2 \leq x^2 \leq 2 + \frac{1}{k} \right\}$

Ejercicio 11 Decidir si las siguientes funciones son continuas en su dominio de definición.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 0$

2. Sea la función característica del conjunto de los racionales $\chi_{\mathbb{Q}}$, donde

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \, x \in \mathbb{Q} \\ 0 \, x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

3.
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lr} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}; (p,q) = 1; q > 0. \end{array} \right.$$

Ejercicio 12 Sea E un subconjunto compacto de R^n y f una función continua en E (relativo a E). Mostrar que entonces:

1. $f(E)$ resulta compacto.
2. f está acotada en E (Es decir $\sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$).
3. f asume su supremo y su ínfimo en E. Es decir existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $f(x_1) = \sup_{x\in E} f(x)$ y $f(x_2) = \inf_{x\in E} f(x)$
4. f es uniformemente continua en E (relativo a E). Es decir dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$ para todo $x, y \in E$.

Ejercicio 13

- a) Mostrar que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es uniformemente continua.
- b) Mostrar que si f es Lipchitziana, entonces es uniformemente continua. La recíproca es cierta?
- c) Mostrar que si f está definida y es uniformemente continua en E entonces existe $\overline{f}$ definida y continua en $\overline{E}$ tal que $\overline{f} = f$ en E.
- d) Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin \frac{1}{x}$. Estudie si f es o no uniformemente continua.
- e) Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$. Estudie si f es o no uniformemente continua. ¿Qué se puede decir en$(0,\infty)$?

Ejercicio 14

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f_k : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_k : A \overset{u}{\to} f$ en $\underset{u}{A}$. Mostrar que f es continua. ii) Probar también: Si las f_k son uniformemente continuas y $f_k : A \to f$ entonces f es uniformemente continua.
2. La sucesión de funciones $\{fn\}$ de valores reales, definidas en $E \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente en E, si y solo si, para cada $\in \epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n, m \geq N$ y $x \in E$,entonces $| f_n(x) - fm(x) |< \epsilon$

Ejercicio 15 Dadas las siguientes sucesiones de funciones. Estudiar la convergencia puntual y uniforme.

1. $f_n(x) = \frac{x}{n}$ si $x \in [0,1]$
2. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = \frac{x}{n}$
3. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = nx(1-x)^n$
4. $f_n(x) = ne^{-nx^2}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq x \leq 1$
5. $f_n(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq x \leq 1$.
6. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Bibliografía

1. Wheeden & Zygmund. An Introduction to Real Analysis. Pure and Applied Mathematics.
2. Spiegel M. Real Variable and Lebesgue Measure and Integration with Aplications to Fourier Series. Serie Outline Schaum.