Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Medida e Integración
2^{do}. Cuatrimestre 2020
Licenciatura en Matemática

Trabajo Práctico N°1: Cardinalidad, Coordinabilidad y Sucesiones de Conjuntos

Ejercicio 1 Para los siguientes items muestre la coordinabilidad que se indica. Escriba explícitamente la función biyectiva encontrada

1. $\mathbb{N}$ es coordinable con $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.
4. $\mathbb{Q}_{|[0,1]}$ es numerable.
5. Un número real α se llama algebraico si existe un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, con coeficientes enteros, tal que, $P(\alpha) = 0$. El conjunto algebraico es numerable.
6. La unión de una familia finita o numerable de conjuntos numerables resulta numerable.
7. Suponga que existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva, entonces A es numerable.
8. Suponga que existe una función $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva, entonces A es numerable.

Ejercicio 2 Pruebe que:

1. $\mathbb{R}$ no es numerable.
2. Sean $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, $[a, b]$ es no numerable.
3. El conjunto de Cantor no es numerable.

Ejercicio 3 Dado un conjunto X y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X. Muestre que $| X |< \mathcal{P}(X)$.
Ejercicio 4 Probar si A y B son conjuntos tales que $| A |\leq| B |$ y $| B |\leq| A |$ entonces $| A |=| B |$.
Ejercicio 5 Dada una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ Pruebe que

1. $\emptyset \subset \liminf_{k\to\infty} E_k \subset \limsup_{k\to\infty} E_k$
2. Si $E_k \nearrow E$, entonces $\liminf_{k\to\infty} E_k = E = \limsup E_k$
3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, tal que pertenece a una cantidad finita de E_k, entonces $x \notin \limsup_{k\to\infty} E_k$
4. Si $E_k \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces $\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$
5. $(\limsup_{k\to\infty} E_k)^c = \liminf_{k\to\infty} E_k$.

Ejercicio 6 Halle $\limsup_{k\to\infty} E_k$ y $\liminf_{k\to\infty} E_k$ si

1. $E_k = [-\frac{1}{k}, 1]$ si k es par y $E_k = [1, \frac{1}{k}]$ si k es impar
2. $E_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1 - 1/k\}$
3. $E_k = (x_n - 1, x_n + 1)$ con $x_n \in \mathbb{Q}$

Bibliografía

1. Hungerford T. Algebra. Springer.
2. Wheeden & Zygmund. An Introduction to Real Analysis. Pure and Applied Mathematics.

J.C.R & E.A.L. 2020