Teoría Deductiva

Francisco Seoane

ISBN:

Agradecimientos:

A mi mamá, Susana, que siempre me ha motivado a seguir con las metas de mi vida, y su apoyo y cariño ha sido siempre incondicional.

A mi hermano, Daniel (Lalo), por sus chascarrillos que siempre resultan beneficiosos para una personalidad como la mía.

A mi papá, Edison, que ya se ha ido, gracias por las tardes de mates y por acompañarme mientras «andaba por las nubes».

A mis tías, Silvana y Luz, siempre mis complices y segundas madres, por todo su cariño y apoyo.

A mi otro padre, Jhonny, cuyos comentarios sobre este trabajo me han dado una nueva perspectiva.

Agradezco profundamente a todos mis profesores de matemática que han permitido la gestación de esta obra. Especialmente:

A María Elda Saubaber, quien me introdujo a las primeras pruebas matemáticas y a la formalidad.

A Beatriz Abadie, en cuyas cátedras de topología se gestó la inspiración de gran parte de este trabajo.

A Mariana Haim, que me hizo ver mediante el álgebra, una forma elegante de desarrollar una teoría matemática.

A Dolores Alia (Loli), que siempre me recibe con gentileza (y generalmente sin aviso) en su casa para charlar de matemática.

A Jorge Yazlle, un extraordinario docente y una persona de una enorme calidez humana, que a pesar de todas sus responsabilidades pudo hacerse un tiempo para interesarse por este trabajo y darme sus alentadores y estimulantes comentarios.

También va un agradecimiento para todos aquellos docentes que han sabido aguantar, e incluso avivar, mi impertienencia y mi curiosidad.

Índice general

Prefacio

Introducción

En este pequeño libro nos adentramos en las preguntas de las preguntas. Cada una nos llevará a caminos inesperados... Aquí se desarrolla una nueva teoría que, sin tener otro nombre tal vez más apropiado, se ha dado a llamar «teoría deductiva». Y que no los confunda el nombre, porque nada hay aquí sobre lógica proposicional. Este libro pretende ser una historia que comienza con una pregunta y que continua aún hoy con preguntas. Porque eso es realmente lo hermoso de la matemática, las interrogantes y cómo ellas nos van abriendo camino y haciendo imaginar mundos dentro de mundos. Dicen que uno es el que escribe, sin embargo, llega un momento en el que se tiene la extraña sensación de que una obra se escribe a sí misma, y lo único que se hace es observar con fascinación cómo todo surge como si siempre hubiese estado ahí. En este sentido, siempre he tratado de mantenerme fiel al espíritu de la creatividad y la imaginación matemática...

Estoy seguro que muchos de los que nos topamos con la matemática hemos preguntado, o intuido una pregunta extraña, o quizás sensación sobre las afirmaciones matemáticas y muy especialmente de la forma en que una afirmación *«implica»* otras afirmaciones. En matemática este proceso es manejado con mucha elegancia y sutileza de modo que parece sumamente natural. Como si esa relación de implicancia hubiera estado allí desde siempre. De hecho, se puede sentir el peso de todos los años, siglos incluso, sobre esa obviedad. Es intuitivo. Todos sabemos qué es que algo implique otra cosa ¿no? Se dice por ejemplo, si sumo esto a esto *entonces* obtengo esto otro. Uno ya sabe lo que se quiere decir, se entiende esencialmente la sensación de consecuencia. La tiene incorporada porque es un poco heredada de la consecuencia práctica en la vida diaria. Ese *«implica»* viene tan natural de allí que uno tiene la inercia mental de no hacer esa pregunta. Porque sentimos que ya está respondida. Y por supuesto que en ciertos aspectos lo está. Pero no puedo evitar tener verdadera curiosidad y preguntar: ¿Qué es ese *«implica»*? Y este es el sentido de este libro. Desarrollar la teoría que responde a esa pequeña chispa de curiosidad. Y por supuesto, luego de la chispa y con las herramientas matemáticas como combustible lo que viene es el fuego creativo del quehacer matemático. Este pocas veces se puede controlar una vez encendido si es que el campo es propicio. Por eso lo he dejado que corra, controlándolo pocas veces, y las preguntas no han hecho más que crecer...

Como quería saber qué es ese «implica», lo trataremos de aquí en más como una entidad matemática por definir. Además, y como es usual, usaremos el lenguaje de la teoría de conjuntos para explicitar dicha definición. Por lo tanto nuestro universo será un conjunto arbitrario que hará las veces de *«afirmaciones»*, llamémosle α (por afirmaciones); ya que nuestro concepto por definir relaciona no otra cosa que afirmaciones.

Supongamos ahora que queremos decir que un conjunto de afirmaciones $A \subseteq \alpha$ *implica* otro conjunto de afirmaciones $B \subseteq \alpha$, para decirlo en lenguaje de la teoría de conjuntos tenemos que decir algo así como que el par (A, B) es elemento de algún conjunto especial, llamémosle δ (por deductivo), y este conjunto por construcción no podrá ser más que un subconjunto de $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$. Es decir que nuestro concepto, la definición que buscamos, vendrá dada por condiciones impuestas a este conjunto especial $\delta \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$.

Pero... ¿Qué propiedades tiene este ente abstracto, tal y como se ha concebido?

La primera propiedad que se puede intuir es la llamada *propiedad reflexiva*, es decir, dado cualquier conjunto $A \subseteq \alpha$, este se implica a sí mismo, por lo tanto la primera propiedad de nuestra definición es: $(A, A) \in \delta$ para todo conjunto $A \subseteq \alpha$.

La segunda propiedad de esta relación será, como es natural, la *propiedad transitiva*, es decir, si *A implica B y B implica C*, todos subconjuntos de α, entonces *A implica C*. Esta propiedad es clara también desde el punto de vista propiamente intuitivo. Nuestra segunda propiedad en nuestra definición será: $(A, B) \in \delta$ y $(B, C) \in \delta$ entonces $(A, C) \in \delta$ para todos conjuntos $A, B, C \subseteq \alpha$.

¿Qué sucede ahora cuando consideramos por ejemplo que *A implica B*? La intuición de este concepto nos dice que *A implica cualquier subconjunto de B*. Esto es, $(A, B) \in \delta$ entonces $(A, C) \in \delta$ para todo $C \subseteq B$. En otras palabras, si un conjunto implica un cierto conjunto de afirmaciones debe implicar cualquier subconjunto del mismo.

La siguiente pregunta es qué pasa cuando consideramos lo que sucede si *A implica B_1, A implica B_2, A implica B_3,...* o una familia arbitraria de conjuntos, es intuitivo que implicará al conjunto que los tiene a todos, es decir a la unión de ellos, por lo tanto *A implica* $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots$. En general para una familia arbitraria, tenemos lo siguiente: Si *A implica B_λ $\forall \lambda \in \Lambda$ entonces A implica* $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.

La costumbre de los matemáticos es la de economizar axiomas siempre que esto sea posible, en este caso, las últimas dos propiedades se pueden juntar en la siguiente: Supongamos que A *implica* B_λ $\forall\lambda \in \Lambda$ *entonces* A *implica* C*, para todo* $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

Cualquier otra propiedad intuida de manera tan abstracta no excederá la de estas tres propiedades obtenidas, el lector debe observar que las dos primeras constituyen un preorden y por lo tanto no son suficientes para diferenciar este ente abstracto de otros. Sin embargo, las tres propiedades obtenidas establecen una nueva colección de propiedades por ahora no estudiadas.

En este sentido es que esta es una nueva aventura.

Temas que se asumen conocidos por el lector

En general este texto pretende ser autocontenido en el sentido de que cada capítulo introduce los temas que trata y cada uno depende de los anteriores. Pero es necesaria una base mínima en teoría intuitiva de conjuntos, y sin duda ayudará la fluidez con estos temas para poder interiorizar mejor los nuevos conceptos que se apoyan en ella.

A partir del capítulo 5, algún conocimiento de topología y álgebra hará que las motivaciones y los resultados se vean con más claridad.

Por último, y sobre todo para la segunda parte del libro, en el que se plantean las interacciones entre teorías, ayudará una cierta madurez matemática para encontrar sentido y utilidad a las analogías intensas que se proponen en el texto.

Precedentes y Espíritu del Libro

Como la mayoría de los temas que se tratan en este libro resultan inéditos, la forma en que se construye este libro es como un castillo. Desde los cimientos hasta las pequeñas torrecitas. Cada uno de los resultados está cuidadosamente demostrado (lo que no implica que no puedan haber errores) y siempre construiremos sobre lo que ya hemos hecho, nunca apoyándonos en otros textos sin dar referencia explícita de las definiciones o resultados que se usan en cada caso.

Cada resultado y definición es motivada y referenciada de manera lineal, y siempre que en cada capítulo el lector entienda lo esencial no hará falta volver atrás.

Existen unos pocos precedentes a este texto, que corresponden sobre todo a la noción de operador clausura, pero su trato aquí será muy diferente, aquí este concepto será un generador de estructura y una luz que guiará nuestra intuición durante toda la obra. En otros contextos, la idea de operador clausura suele ser un concepto anexo o una herramienta. En este libro la clausura es la idea clave. La reina de este castillo.

El espíritu general del libro es el de la creación que conlleva el agotar todos los frescos resultados que se desprenden poco a poco en el desarrollo de la teoría deductiva, así como el de generalizar hechos de otros contextos y de motivar nuevas preguntas y problemas que provienen de la interacción entre varias ramas de la matemática.

Desarrollo de la Obra

Este libro se desarrolla en principio mediante la explotación de una primera definición de «espacio deductivo», en el primer capítulo vemos las primeras consecuencias y ejemplos de la definición.

En el capítulo 2 pasamos a una forma de obtener espacios deductivos mediante sus completaciones, esta última no es una noción fundamental en el texto, así que el lector puede saltarse este capítulo entero y retomarlo antes de comenzar el capítulo 8, en el que se le dará uso. Aunque por supuesto ayudará a entender mejor las motivaciones del capítulo 3.

En el capítulo 3 se presenta la idea clave y central del libro, y que guiará todas las intuiciones, resultados y perspectiva, es la idea de función *clausura*; originalmente en el desarrollo de esta teoría esta función fue nombrada «función generatriz», debido a su motivación mediante los operadores del estilo: «subestructura generada por el conjunto...» (subgrupo generado, ideal generado, subespacio vectorial generado), y de hecho he estado a punto de mantener su nombre, pero en vista de que las propiedades de este operador son conocidas, debí favorecer a la literatura de los operadores clausura. Lo interesante es que estos operadores no han sido concebidos hasta ahora como conceptos generadores de estructura sino que han sido subproductos de muchos desarrollos teóricos. Muchísimos, de hecho. Se espera por lo tanto que el lector comprenda íntimamente el concepto de función clausura. Y que alguna rama de la matemática en la que el este se sienta cómodo permita interpretar los resultados de manera más amena. En otras palabras, busque la clausura que le sea más cómoda para acompañarlo. Los estudiantes de los primeros años de la carrera en matemática irán de la mano con la «clausura vectorial» (el operador: subespacio vectorial generado por...), los topólogos tendrán a la queridísima clausura topológica como amiga en este viaje, los algebristas tendrán a la «clausura de grupos» (el operador: subgrupo generado por...) o quizá a la «clausura ideal» (el operador: ideal generado por...), los interesados en teoría del orden tendrán al no tan conocido «conjunto superior generado por» y los interesados en teoría de lenguajes formales no podrán evitar tener en consideración a la clausura de Kleene.

En el capítulo 4 nos interesamos por las subestructuras de los espacios deductivos que llamaremos subespacios deductivos y que al igual que las clausuras, caracterizarán a este nuevo concepto.

En el capítulo 5 formalizamos la noción de generalización matemática y plantamos las motivaciones para la parte 2, donde trataremos sobre las interacciones entre diferentes teorías matemáticas.

En el capítulo 6 nos ocupamos de construcciones generales en espacios deductivos, que tienen su contrapartida en cada una de las teorías que son menos generales que ella. Son construcciones que se repiten a lo largo y ancho de la matemática (la noción de morfismo e isomorfismo, los invariantes, los espacios producto y los espacios cociente). De la misma manera que la teoría de categorías realiza esta búsqueda desde las propiedades universales. Aquí se plantean lo que llamaremos proposiciones de intensidad, y que permiten caracterizar a generalizaciones de muchos conceptos a la vez.

En el capítulo 7 nos interesamos en explotar la íntima generalización de la topología que lleva a cabo la teoría deductiva a través de la traducción de conceptos, natural entre ellas.

En el capítulo 8 tratamos la relación de la teoría deductiva con el ente abstracto por excelencia en álgebra: los grupos. Y también generalizamos la intuición de operación, mediante una nueva noción clave en teoría deductiva: la constructibilidad.

En el capítulo 9 nos metemos con la teoría de los preórdenes, órdenes y relaciones de equivalencia, y nos ocupamos de la relación y los conceptos nuevos que ésta induce sobre nuestro objeto de estudio.

En el capítulo 10 hacemos el mismo trabajo pero esta vez con los anillos y los módulos, recolectando otros conceptos interesantes y trayéndolos al ambiente de la teoría deductiva.

Cada capítulo tiene al final una serie de ejercicios que ayudarán a la comprensión de los temas tratados, cada uno de ellos marcados con una cantidad de estrellas que indicará su dificultad, de $(\star)$ a $(\star\star\star\star\star)$.

Finalmente dejamos una breve reflexión final, un importante problema abierto de la teoría y el glosario de símbolos usados en la obra.

Parte 1

Espacios Deductivos

Capítulo 1

Introducción

```
"Mi mente está abierta."
-Paul Erdös
```

1.1. Definición y Generalidades

DEFINICIÓN 1.1 (Espacio Deductivo). Sea α un conjunto, y sea $\delta \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ un subconjunto. Decimos que el par (α, δ) es un *espacio deductivo* sii:

1. $(A, A) \in \delta$ para todo conjunto $A \subseteq \alpha$. (Propiedad Reflexiva)
2. $(A, B) \in \delta$ y $(B, C) \in \delta$ entonces $(A, C) \in \delta$; para todos A, B, C subconjuntos de α. (Propiedad Transitiva)
3. $(A, B_\lambda) \in \delta\ \forall \lambda \in \Lambda$ entonces $(A, C) \in \delta\ \forall C \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$; para todos $A, C \subseteq \alpha$, y para toda familia$\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ (Propiedad Deductiva)

Decimos además que δ es un *deductor* en α.

OBSERVACIÓN 1.1. A falta de otra palabra, usaremos «deductivo/a» para significar todas aquellas propiedades o conceptos que nazcan de esta teoría y le sean propias.

Por supuesto que esta definición, así tal y como se nos presenta, abstractamente, aparenta ser un concepto obscuro y difícil de interpretar. Ahora cambia nuestra pregunta. Nos interesa entender propiamente esta definición. Relacionarla con otros conceptos, ejemplificar tanto como se pueda y construir ampliamente sobre esta base que en este momento puede resultar por demás enigmática. Es decir, ¿Qué es un espacio deductivo? ¿Qué formas tengo de encontrar espacios deductivos? ¿Cuáles son las primeras consecuencias de la definición que elegimos? El lector podrá entender mejor las motivaciones y la estructura de esta definición si mantiene en mente, de forma apócrifa, la idea de que los elementos de α son «afirmaciones matemáticas», y que $(A,B) \in \delta$ se interpretaría como «el conjunto de afirmaciones A *implica* el conjunto de afirmaciones B», o bien, «$A \Rightarrow B$». A pesar de tener esto en mente, nos encontraremos situaciones en las cuales surgiran hechos contraintuitivos, por ejemplo que el conjunto vacío «implica» conjuntos no vacíos, en estos ejemplos veremos que es bastante natural la presencia de estas situaciones, y que pedir que no sucedan cosas como esta en nuestra definición de espacio deductivo no será necesario para mantener estas fuertes intuiciones guías. Observar que en la definición, Λ es un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria.

Las primeras consecuencias y ejemplos que pueden surgir son los que se despejan casi automáticamente de consideraciones simples sobre los axiomas. Nos alejaremos de aquellos ejemplos triviales que corresponden a destacar la relación que tienen estos, con estructuras o axiomáticas de la lógica proposicional, aunque siendo conscientes de la motivación inicial. Aquí trataremos al espacio deductivo como un concepto abstracto, y pensaremos en el «implica» únicamente para facilitar las intuiciones. Las primeras consecuencias de la definición son:

PROPOSICIÓN 1.1 (Propiedades). *Sea (α,δ) un espacio deductivo. Sean $A,B,C,D \subseteq \alpha$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$. Se cumple,*

1. $(A,B) \in \delta$ entonces para todo $C \subseteq B$, $(A,C) \in \delta$
2. $(A,\emptyset) \in \delta$
3. $(A,B_\lambda) \in \delta\ \forall\lambda \in \Lambda$ entonces $(A, \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \in \delta$
4. $(A,B) \in \delta$ y $(C,D) \in \delta$ entonces $(A \cup C, B \cup D) \in \delta$

DEMOSTRACIÓN. 1) Considere la familia $\{B\} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$, y sabemos que $(A,B) \in \delta$. Observemos que la unión de los elementos de dicha familia es el propio conjunto B. Aplicando la propiedad deductiva obtenemos $\forall C \subseteq B\ (A,C) \in \delta$.

2) Por la propiedad reflexiva tenemos que $(A,A) \in \delta\ \forall A \subseteq \alpha$, pero $\emptyset \subseteq A\ \forall A \subseteq \alpha$, y entonces aplicando la propiedad 1 recién probada, tenemos que $(A,\emptyset) \in \delta$.

3) Observar que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ y aplicar la propiedad deductiva tomando $C = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

4) Sabemos por la propiedad reflexiva que $(A \cup C, A \cup C) \in \delta$, luego la propiedad 1, nos permitirá afirmar que $(A \cup C, A) \in \delta$, ya que $A \subseteq A \cup C$ y sabemos que $(A,B) \in \delta$. Aplicando la propiedad transitiva obtenemos que $(A \cup C, B) \in \delta$. Similarmente se ve que

$(A \cup C, D) \in \delta$. Aplicando la propiedad 3 recién probada obtenemos que $(A \cup C, B \cup D) \in \delta$. □

1.2. Primeros Ejemplos

Por supuesto alguien podrá objetar el sentido de esta travesía, y sin dudas estará acertado. La verdad que si de sentido estamos hablando, es el mero ejercicio de nuestra curiosidad. Prometo que todo cobrará un sentido a medida que nos movamos.

EJEMPLO 1.1. Por supuesto los primeros dos ejemplos son los ejemplos triviales. $[Id]_\alpha := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : A \supseteq B\}$ es un deductor en α. Sé que la notación no es clara por ahora, pero créanme que lo será. Evidentemente este espacio se relaciona con algún tipo de operador identidad. También por supuesto $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ es un deductor en α. Queda como tarea del lector el verificar que efectivamente $(\alpha, [Id]_\alpha)$ y $(\alpha, \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha))$ son espacios deductivos.

EJEMPLO 1.2. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ consideremos el siguiente deductor: $[|]_\mathbb{Z} := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \forall b \in B \exists a \in A \, tal\, que\, a|b\}$. La relación $|$ se llama «divide». Decimos que $a|b$ cuando existe un entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $an = b$ (Observe que con esta definición $0|0$, lo cual se aleja de lo usual en el sentido de que generalmente en esta definición se excluye explicitamente la posibilidad de que el cero divida a algún entero, este hecho sin embargo, no afecta al ejemplo). En este caso, y para ilustrar, probaremos que este es un deductor en $\mathbb{Z}$. *Propiedad Reflexiva*: Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$, veamos que $(A, A) \in [|]_\mathbb{Z}$: Tomemos $a \in A$ tenemos que probar que existe $a^* \in A$ tal que $a^*|a$. Bastará tomar $a^* = a$ ya que la relación es reflexiva. Es decir, *a divide a a*. *Propiedad Transitiva*: Supongamos que $(A, B) \in [|]_\mathbb{Z}$ y $(B, C) \in [|]_\mathbb{Z}$ tenemos que probar que $(A, C) \in [|]_\mathbb{Z}$: Sea entonces $c \in C$, tenemos que existe $b \in B$ tal que $b|c$ dado que $(B, C) \in [|]_\mathbb{Z}$, a su vez existe $a \in A$ tal que $a|b$ porque $(A, B) \in [|]_\mathbb{Z}$. Pero si, $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$ (queda como ejercicio). Y esto a su vez significa que encontramos un $a \in A$ tal que $a|c$ para un $c \in C$ arbitrario. De modo que hemos demostrado que $(A, C) \in [|]_\mathbb{Z}$. Y esto con $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$ arbitrarios también. Así que valen de forma general. *Propiedad Deductiva*: Supongamos que $(A, B_\lambda) \in [|]_\mathbb{Z}\ \forall \lambda \in \Lambda$, y tomemos $C \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, tenemos que ver que $(A, C) \in [|]_\mathbb{Z}$: Sea $c \in C$, como $C \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ tenemos que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $c \in B_{\lambda_0}$ y como en particular $(A, B_{\lambda_0}) \in [|]_\mathbb{Z}$ tenemos que existe $a \in A$ tal que

$a|c$. Esto prueba la última propiedad y cierra la demostración. Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, [|]_{\mathbb{Z}})$ es un espacio deductivo.

Ejemplo 1.3. Generalizando lo anterior consideremos ahora un conjunto con un preorden $(\alpha, \leq)$. Es decir, la relación $\leq$ sobre α es reflexiva y transitiva. Tenemos que el siguiente es un deductor en α: $[\leq]_\alpha := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : \forall b \in B \exists a \in A \; tal \; que \; a \leq b\}$. También queda la prueba como ejercicio del lector. Los preórdenes abundan, por supuesto que la relación «divide» es un preórden en el conjunto de números enteros, ejemplifique con otras estructuras conocidas. Escriba elementos de los deductores en cuestión.

Ejemplo 1.4. Un ejemplo que luego tendrá mucha repercusión más adelante en la teoría. Supongamos que $f : \alpha \to \alpha$ es una función. El siguiente conjunto es un deductor: $[f]_\alpha := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : \forall b \in B \; \exists a \in A \; \exists n \in \mathbb{N} \; tal \; que \; f^n(a) = b\}$. Donde consideramos que f^n es la composición de la función f consigo misma n veces. Y para permitir que sea en efecto un deductor asumimos que $f^0 = id$. Queda como ejercicio ver que es un deductor. También el lector debe observar que está oculta una relación de preorden. El lector tiene dos opciones: O prueba directamente que es un deductor. O demuestra que la definición oculta una estructura como en la del ejemplo anterior. Dado que los ejemplos de funciones son vastos, ejemplifique con funciones de su agrado. La pregunta que ocasiona el notar que en efecto este es otro caso particular del ejemplo previo. ¿Cualquier espacio deductivo proviene de un preorden en el sentido de más arriba? Realmente la teoría no tendría mucho sentido si así fuera. Aquí daré un contraejemplo ilustrativo pero el lector deberá encontrar otros:

Ejemplo 1.5 (Envolvente Convexa). En $\mathbb{R}$ consideramos el siguiente deductor: $\kappa_{\mathbb{R}} := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \forall b \in B \; \exists a_1, a_2 \in A \, tal \, que \, b \in a_1 \leq b \leq a_2\}$. Queda como ejercicio verificar que $(\mathbb{R}, \kappa_{\mathbb{R}})$ es un espacio deductivo. El lector debe observar que por como ha sido construido el deductor, no proviene de un preorden en el sentido del ejemplo anterior. Pruébelo.

Esta noción previa, en la que un espacio deductivo es inducido por un preorden, y ya que esto parece ser común. Motiva la siguiente:

Definición 1.2. Diremos que un espacio deductivo (α, δ) es *compatible con* ε sii: existe un preorden $\leq$ en α de modo que $\delta = [\leq]_\alpha$.

Más adelante en la teoría quedará claro la razón de este nombre.

Ejercicios

EJERCICIO 1.1. Encuentre alguna otra propiedad que cumplan los espacios deductivos. ($\star\star$)

EJERCICIO 1.2. Pruebe que los siguientes son espacios deductivos en los contextos correspondientes: $(\alpha, [Id]_\alpha)$, $(\alpha, \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha))$, $(\alpha, [\leq]_\alpha)$, $(\alpha, [f]_\alpha)$, $(\mathbb{R}, \kappa_{\mathbb{R}})$. ($\star$)

EJERCICIO 1.3. ¿Por qué falla la inclusión cuando quiero definir un espacio deductivo como se hizo con la contención de conjuntos?

(Es decir, supongamos que se considera: $[Cont]_\alpha = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : A \subseteq B\}$. Observe que no es un deductor en α.) ($\star\star$)

EJERCICIO 1.4. ¿Qué espacios deductivos de los anteriores son compatibles con ε? ($\star\star$)

EJERCICIO 1.5. Demuestre que $(\mathbb{R}, \kappa_{\mathbb{R}})$ no es compatible con ε. ($\star\star$)

EJERCICIO 1.6. Encuentre por lo menos un ejemplo adicional de espacio deductivo que no sea compatible con ε. ($\star\star\star$)

EJERCICIO 1.7. Pruebe que una definición análoga en $\mathbb{R}^n$ no es posible debido a que sus puntos no están totalmente ordenados (no hay un orden natural entre sus puntos). La Envolvente Convexa en $\mathbb{R}^n$ si es un espacio deductivo. Hay que trabajar un poquito más para poder definirla en este contexto. Intente definir el espacio deductivo de la envolvente convexa en $\mathbb{R}^n$. ($\star\star\star$)

EJERCICIO 1.8. Considere el conjunto $\{0, 1\}$. ¿Cuántos espacios deductivos distintos pueden crearse allí? Identifique cuáles son compatibles con ε. ¿Cuáles son los que coinciden con espacios deductivos ya considerados? ($\star\star\star$)

EJERCICIO 1.9. Pruebe que la intersección arbitraria de deductores en un mismo conjunto es un deductor. Observe que para la unión esto no es cierto, ni siquiera para la unión finita. Encuentre un contraejemplo.

¿Qué deductor obtengo si intersecto todos los deductores de un conjunto? ($\star$)

Capítulo 2

Completaciones

```
"Todos los castillos en la tierra...
fueron alguna vez castillos en el aire."
-Proverbio.
```

2.1. Definición y Generalidades

El último ejercicio del capítulo previo nos dice que existe de hecho, para cada conjunto, un deductor especial que es en cierto sentido el *mínimo,* el lector que haya hecho este ejercicio se habrá dado cuenta de que el deductor en cuestión es el del primer ejemplo. Dado un conjunto α, siempre tendremos que cualquier deductor contendrá al deductor $[Id]_\alpha$. Pero ahora nos hacemos la siguiente pregunta: Supongamos que tenemos el deductor $[Id]_\alpha$ pero queremos otro deductor que tenga además otro par arbitrario $(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$; ¿cuál es el deductor más pequeño que tiene al nuevo elemento? ¿existe? Si lo hay, ¿es el único? En otras palabras, queremos que nuestro castillo tenga tal o cual cosa, específicamente. ¿Cómo es el castillo más pequeño que tiene todas esas partes que hemos elegido? Esa pregunta motiva la siguiente:

Definición 2.1 (Completación). Sea α un conjunto. Sea $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$.

Decimos que $C \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ es una *completación de λ en α* sii:

1. $\lambda \subseteq C$
2. C es un deductor en α.

Es decir, un deductor que contenga a los pares seleccionados. Algunas veces en que λ y α sean claros por contexto, se dirá simplemente *completación.*

Dado un conjunto $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$, la existencia de una completación en α resulta obvia dado que $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ es un deductor en α, y por lo tanto será completación de todo subconjunto $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ considerado. Sin embargo, es evidente que no es único. Es decir, existen varias completaciones para cada conjunto λ.

Sin embargo nos interesa la completación más pequeña para un conjunto dado, la idea será intersectar todas las completaciones de dicho conjunto, obteniendo una completación que está incluida en las demás. Veamos que esto es posible y probemos la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.1. *La intersección de completaciones es una completación. Formalmente, Sean α un conjunto y $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$, entonces si $\{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ es una familia de completaciones de λ en α, $\bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$ es una completación de λ en α.*

DEMOSTRACIÓN. El lector que haya hecho los ejercicios notará que la prueba es casi automática si se asume que la intersección arbitraria de deductores es un deductor. Sin embargo haremos el argumento directamente.

Para ver que $\bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$ es una completación, hay que ver que cumple las dos propiedades:

1) $\lambda \subseteq C_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$, y por lo tanto $\lambda \subseteq \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$. Simplemente por monotonía de la intersección respecto de la inclusión. Es decir, si tengo una familia de inclusiones, las intersecto miembro a miembro y se sigue manteniendo la inclusión.

2) $\bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$ es un deductor en α:

Ax.I: Sea $A \subseteq \alpha$, tenemos que $(A, A) \in C_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$, de modo que $(A, A) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$.

Ax.II: Sean $A, B, C \subseteq \alpha$ y supongamos que $(A, B) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$ y $(B, C) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$, entonces $(A, B) \in C_\theta$ y $(B, C) \in C_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$, por lo tanto como son todos deductores, tendremos que $(A, C) \in C_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$, lo que es lo mismo que decir que $(A, C) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$.

Ax.III: Sean $A, C \subseteq \alpha$, $\{B_\mu\}_{\mu \in M} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ y supongamos que $(A, B_\mu) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$ para todo $\mu \in M$ y consideremos ahora $C \subseteq \bigcup\limits_{\mu \in M} B_\mu$, primero tenemos que $(A, B_\mu) \in C_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$ y para todo $\mu \in M$; de manera que dado cualquier $\theta \in \Theta$ tendremos $(A, C) \in C_\theta$ aplicando el axioma III de la definición de espacio deductivo, y esto último es equivalente a decir que $(A, C) \in \bigcap\limits_{\theta \in \Theta} C_\theta$. $\square$

Ahora siguiendo con nuestra pregunta sobre la mínima completación, extendemos lo anterior al siguiente resultado:

2.2. Completación Minimal

PROPOSICIÓN 2.2 (Completación Minimal). *Sean α un conjunto y $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$, entonces existe y es único el conjunto $[[\lambda]]_\alpha$ que llamaremos «completación minimal» y que verifica:*

I) $[[\lambda]]_\alpha$ es una completación de λ en α.

II) Para toda completación C de λ en α, $[[\lambda]]_\alpha \subseteq C$.

DEMOSTRACIÓN. En caso de existencia la segunda propiedad asegura la unicidad de la completación minimal. Ya que si en principio hubiese dos completaciones minimales, cada una estaría incluida en la otra (por propiedad II) y esto sería lo mismo que decir que son iguales. Es decir, que hay una sola completación minimal.

Probemos la existencia: Definiremos a la completación minimal como sigue:

$[[\lambda]]_\alpha := \bigcap \{C \subseteq \alpha : C\, es\, una\, completación\, de\, \lambda\, en\, \alpha\}$

Veamos que verifica las propiedades:

I) Esto es obvio dado que estamos intersectando completaciones. El conjunto que usamos para la intersección no es vacío porque $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ es una completación.

II) Ahora supongamos que tenemos una completación C de λ en α, por construcción tenemos que $[[\lambda]]_\alpha \subseteq C$. □

OBSERVACIÓN 2.1. El lector debe observar que cada conjunto λ, induce unívocamente un deductor (su completación minimal), y por lo tanto un espacio deductivo; de modo que diremos que $[[\lambda]]_\alpha$ es el deductor inducido por λ, y a su vez que $(\alpha, [[\lambda]]_\alpha)$ es el espacio deductivo inducido por λ. Es interesante observar que existen, sin embargo, varios conjuntos distintos que inducirán el mismo deductor. Por ejemplo, siempre que $\lambda \subseteq [Id]_\alpha$ tendremos que $[[\lambda]]_\alpha = [Id]_\alpha$. En particular tenemos que $[[\emptyset]]_\alpha = [Id]_\alpha$, $[[[Id]_\alpha]]_\alpha = [Id]_\alpha$.

OBSERVACIÓN 2.2. La propia definición de completación induce un espacio deductivo sobre $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$. Nuestro espacio deductivo es: $(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha), \Delta)$ donde $\Delta := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) : B \subseteq [[A]]_\alpha\}$. El lector coincidirá en que esto resulta una propiedad muy extraña, dado que permite repetir el proceso al siguiente nivel usando esta misma propiedad pero ahora sobre $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha))$ lo cual no resulta para nada cómodo para trabajar pero es evidente que es posible continuar la regla anterior. Por otro lado, es interesante verificar la prueba de que Δ es en efecto un deductor: el axioma I es trivial por construcción, sabemos que $A \subseteq [[A]]_\alpha$ para todo $A \subseteq \mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$, esto por la definición de completación minimal. Vamos por el axioma II, supongamos que $B \subseteq [[A]]_\alpha$, $C \subseteq [[B]]_\alpha$ entonces para probar que $C \subseteq [[A]]_\alpha$ nos bastaría con ver que $[[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$, pues entonces tendríamos fácilmente que $C \subseteq [[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$, y la única otra hipótesis que tenemos es que $B \subseteq [[A]]_\alpha$. De modo que nos interesa probar que en general $B \subseteq [[A]]_\alpha$ implica $[[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$, esto lo asumiremos cierto y lo probaremos enseguida. Ahora probemos el axioma III: Para ello supongamos que $B_\theta \subseteq [[A]]_\alpha$ para todo $\theta \in \Theta$, sea ahora $C \subseteq \bigcup_{\theta\in\Theta} B_\theta$, pero como $B_\theta \subseteq [[A]]_\alpha$ para todo $\theta \in \Theta$ tenemos fácilmente que $\bigcup_{\theta\in\Theta} B_\theta \subseteq [[A]]_\alpha$ y por lo tanto $C \subseteq [[A]]_\alpha$. Lo que termina la prueba. Es decir, Δ es un deductor.

2.3. Propiedades de la Completación Minimal

Ahora probaremos lo que debemos de la observación anterior.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea α un conjunto, sean $A, B \subseteq \mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ entonces,*

1. $A \subseteq [[A]]_\alpha$
2. $B \subseteq [[A]]_\alpha$ implica $[[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$

DEMOSTRACIÓN. 1) Esto es trivial por la definición de completación minimal.

2) $[[A]]_\alpha$ es un deductor y a la vez una completación de B porque $B \subseteq [[A]]_\alpha$. Luego, $[[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$ porque las completaciones minimales están incluidas en cualquier otra completación. □

Ejercicios

EJERCICIO 2.1. Pruebe que: Si $A, B \subseteq \mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$, I) $B \subseteq A$ implica $[[B]]_\alpha \subseteq [[A]]_\alpha$ II) $[[[[A]]_\alpha]]_\alpha = [[A]]_\alpha$ $(\star)$

EJERCICIO 2.2. Observe que $[\leq]_\alpha = [[\lambda]]_\alpha$ donde $\lambda = \{(\{a\},\{b\}) \in \mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha) : a \leq b\}$. De una prueba de esto. $(\star\star)$

EJERCICIO 2.3. Exprese todos los espacios deductivos distintos de $[Id]_\alpha$ como una completación propia no trivial (esto es, ni una completación del deductor en cuestión, ni tampoco quitando elementos del deductor $[Id]_\alpha$ al deductor original). $(\star)$

EJERCICIO 2.4. En $\{0,1\}$ identifique los espacios deductivos con los conjuntos que los inducen, estudie la forma en que varios conjuntos inducen el mismo espacio deductivo. $(\star\star)$

EJERCICIO 2.5. ¿Existe alguna forma de identificar un espacio deductivo compatible con ε mediante un conjunto que lo induzca? $(\star\star)$

EJERCICIO 2.6. Pruebe lo siguiente: (α,δ) es compatible con ε sii $\exists\lambda \subseteq \mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ tal que $\forall(A,B)\in\lambda\ \#A=\#B=1$ y $[[\lambda]]_\alpha=\delta$. (recuerde que ser «compatible con ε» significa que existe un preorden que lo induce). $(\star\star)$

EJERCICIO 2.7. Sean $\lambda,\mu\subseteq\mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ ¿Qué sucede con la completación de la unión y la intersección? Relaciónelas con las completaciones individuales. Generalice si corresponde. Pruebe que $[[\lambda]]_\alpha\cap[[\mu]]_\alpha=[Id]_\alpha$ implica $\lambda\cap\mu=\emptyset$. Y vea con un ejemplo que el recíproco no es cierto. $(\star\star\star)$

EJERCICIO 2.8. Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos en $\mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ $(\forall\lambda\in\Lambda\ C_\lambda\subseteq\mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha))$. Pruebe que $[[\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda]]_\alpha\subseteq\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}[[C_\lambda]]_\alpha$. Observe que la otra inclusión es falsa. Ejemplifique. ¿En qué caso se da la igualdad? $(\star\star\star)$

EJERCICIO 2.9. Sea $\lambda\subseteq\mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ ¿Es cierto que $\exists\mu\subseteq\mathcal{P}(\alpha)\times\mathcal{P}(\alpha)$ con $[[\lambda]]_\alpha=[[\mu]]_\alpha$ tal que $\forall\theta$ que verifique que $[[\theta]]_\alpha=[[\lambda]]_\alpha$ se tiene $\#\mu\leq\#\theta$?

Capítulo 3

Función Clausura

"Habría que probarlo..."
-Prof. María Elda Saubaber

3.1. Definición y Generalidades

Observación 3.1. Lo interesante de la completación minimal es que si consideramos el mapeo $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha))$ dado por $\varphi(A) \longmapsto [[A]]_\alpha$, lo único que necesitamos para que el conjunto $\Delta := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)) : B \subseteq \varphi(A)\}$ sea un deductor, es que verifique las dos propiedades que se acaban de probar en el capítulo anterior. Darse cuenta de este hecho motiva la siguiente:

Definición 3.1 (Función Clausura). Sea α un conjunto, y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función. Diremos que φ es una *función clausura* sii:

1. $A \subseteq \varphi(A)$ para todo $A \subseteq \alpha$. (propiedad de extensividad)
2. $B \subseteq \varphi(A)$ implica $\varphi(B) \subseteq \varphi(A)$ para todo $A, B \subseteq \alpha$. (propiedad de tope)

Ya definimos lo que vendría a hacer las veces de la completación minimal. Ahora definamos el conjunto que está relacionado, que vendría a ser el Delta (Δ).

Definición 3.2 (Conjunto Inducido). Sea α un conjunto y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función.
Diremos que el *conjunto inducido* por φ es:
$[\varphi]_\alpha := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : B \subseteq \varphi(A)\}$

3.2. Primer Teorema de Caracterización

Vamos a conectar estas dos definiciones y la observación anterior en el primer teorema de nuestra teoría. Básicamente lo que diremos es que la información contenida en una función clausura es la justa para caracterizar a un espacio deductivo. Este paso nos permitirá escindirnos de la definición axiomática con la que empezamos nuestro camino y nos ayudará a encontrar muchos más ejemplos *naturales* de espacios deductivos. Pasamos de nuestra primera impresión obscura sobre los espacios deductivos, a una caracterización limpia y elegante.

Antes de pasar al resultado daremos un pequeño lema que nos ayudará en el desarrollo del teorema.

LEMA 3.1 (de Yazlle). *Sea α un conjunto, δ un deductor en α y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ dada por:*
$\varphi(A) := \bigcup\{D \subseteq \alpha : (A, D) \in \delta\}$ $\forall A \subseteq \alpha$.
Entonces, $(A, B) \in \delta \Leftrightarrow B \subseteq \varphi(A)$ $\forall A, B \subseteq \alpha$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Estamos suponiendo que $(A, B) \in \delta$, luego $B \subseteq \bigcup\{D \subseteq \alpha : (A, D) \in \delta\} = \varphi(A)$.

($\Leftarrow$) Si $B \subseteq \varphi(A)$, entonces tenemos que $B \subseteq \bigcup\{D \subseteq \alpha : (A, D) \in \delta\}$.

Sea $x \in B$, entonces se tiene que $\exists D \subseteq \alpha$ tal que $(A, D) \in \delta$ con $x \in D$, de modo que $\{x\} \subseteq D$ y luego $(A, \{x\}) \in \delta$ por la propiedad 1 (del capítulo 1). Pero entonces considerando la familia $\{x\}_{x\in B}$ tenemos que $(A, \{x\}) \in \delta$ para cada elemento de dicha familia. Aplicando la propiedad 3 (del capítulo 1) obtenemos que $(A, \bigcup_{x\in B} \{x\}) \in \delta$; es decir, $(A, B) \in \delta$. □

TEOREMA 3.1 (Primer Teorema de Caracterización). *Sea α un conjunto,*

Entonces (α, δ) es un espacio deductivo sii $\exists! \varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ función clausura tal que $\delta = [\varphi]_\alpha$

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$)

Tenemos que ver que $(\alpha, [\varphi]_\alpha)$ es un espacio deductivo.

Ax.I) $\forall A \subseteq \alpha$ $A \subseteq \varphi(A) \Rightarrow (A, A) \in [\varphi]_\alpha$

Ax.II) Sean $A, B, C \subseteq \alpha$ tales que $(A, B) \in [\varphi]_\alpha, (B, C) \in [\varphi]_\alpha$
$\Rightarrow B \subseteq \varphi(A) \Rightarrow \varphi(B) \subseteq \varphi(A)$

Entonces $C \subseteq \varphi(B) \subseteq \varphi(A) \Rightarrow (A, C) \in [\varphi]_\alpha$

Ax.III) Sea $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia de conjuntos tal que $(A, B_\lambda) \in [\varphi]_\alpha$ $\forall \lambda \in \Lambda$
$\Rightarrow B_\lambda \subseteq \varphi(A)$ $\forall \lambda \in \Lambda$

Y sea $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\lambda} B_\lambda$, tenemos que ver que $C \subseteq \varphi(A)$:

Si C es vacío esta claro, si no:

Sea $x \in C \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in B_{\lambda_0} \subseteq \varphi(A)$

Entonces $x \in \varphi(A)$

($\Rightarrow$)

Existencia:

Tomamos $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ definida como sigue:

$\forall A \subseteq \alpha \ \varphi(A) := \bigcup\{D \subseteq \alpha : (A, D) \in \delta\}$

Veamos que es una función clausura:

1) $\forall A \subseteq \alpha \ (A, A) \in \delta$ (Ax.I) luego por el lema tenemos $A \subseteq \varphi(A)$.

2) Sean $A, C \subseteq \alpha$ tales que $C \subseteq \varphi(A)$

entonces por el lema tendremos $(A, C) \in \delta$; a su vez sabemos que $\varphi(C) \subseteq \varphi(C)$, con lo cual el lema nos dice que $(C, \varphi(C)) \in \delta$.

Aplicando Ax. II tenemos que $(A, \varphi(C)) \in \delta$, y el lema nos dice que esto es lo mismo que $\varphi(C) \subseteq \varphi(A)$.

Ahora tenemos que ver que $\delta = [\varphi]_\alpha$:

$(A, C) \in \delta \Leftrightarrow C \subseteq \varphi(A) \Leftrightarrow (A, C) \in [\varphi]_\alpha$

Unicidad:

Sea $\psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función clausura tal que $\delta = [\psi]_\alpha$

Estamos en condiciones del lema.

Luego, $(A, C) \in [\psi]_\alpha \Leftrightarrow C \subseteq \psi(A) \Leftrightarrow (A, C) \in \delta \Leftrightarrow C \subseteq \varphi(A) \Leftrightarrow (A, C) \in [\varphi]_\alpha$

Por lo tanto, $\varphi = \psi$ y φ es única. $\square$

Diremos que esta función es la función clausura del espacio deductivo y la notación será: $\delta_{[\alpha]}$. Es decir que si el espacio deductivo es (α, δ), la función clausura que lo induce es $\delta_{[\alpha]}$.

¿Qué significa este teorema? ¿Cuáles son las repercusiones? Lo primero es que ahora tenemos una manera más, además de la definición y la completación minimal, de obtener ejemplos de espacios deductivos. Pero también nos permite tener una nueva visión sobre lo que significa propiamente el concepto que definimos al principio tan ingenuamente. Nos permite dar una sensación de coherencia de los axiomas y además podremos verificar de forma rápida si algo es o no un espacio deductivo. Lo que resta es ver cuál es la interpretación de una función clausura desde el punto de vista con el que habíamos comenzado. La función clausura de un espacio deductivo nos dice, dadas ciertas afirmaciones, cuáles son todas las afirmaciones que estas implican. Aplicaciones de este estilo son muy comunes en matemática...

3.3. Ejemplos

EJEMPLO 3.1. El primer ejemplo es el que se debía, y en el que explicamos por qué el primer ejemplo de espacio deductivo se relaciona con un cierto tipo de operador identidad. El lector debe observar que el operador $Id : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ es una función clausura. Y el espacio deductivo que induce es el mismo que el de nuestro primer ejemplo. Es decir, $[Id]_\alpha$ resulta ser la notación correcta del deductor en cuestión teniendo en consideración la definición de conjunto inducido. A este espacio deductivo le daremos el nombre de *discreto*. A esta clausura la llamaremos «*clausura discreta*».

EJEMPLO 3.2. El próximo ejemplo es el que viene de considerar $\varphi(A) = \alpha \ \forall A \subseteq \alpha$. Es evidentemente una función clausura e induce el espacio deductivo que tiene como deductor a $\mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ en α. La notación para este deductor será, siguiendo con el ejemplo anterior: $[\alpha]_\alpha$. A este espacio deductivo le daremos el nombre de *caótico*. A dicha clausura la llamaremos «*clausura caótica*».

EJEMPLO 3.3. Los siguientes mapas son funciones clausura (al final se da una nomenclatura de cada una de ellas):

1) Consideremos G un grupo. Y $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ dos funciones definidas respectivamente por:
$A \longmapsto$ subgrupo generado por A, $A \longmapsto$ normalizador de A. («*clausura de grupos*» y «*clausura normal*» respectivamente)

2)V es un espacio vectorial. Sea $\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ subespacio generado por A. («*clausura vectorial*»)

3) X es un espacio topológico. Sea $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ la *clausura topológica*.

4) C es un espacio topológico conexo. Sea $\varphi : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ componente conexa de A. («*clausura conexa*»)

5) K es un espacio topológico compacto. Sea $\varphi : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ componente compacta de A. («*clausura compacta*»)

6) A es un anillo. Sean $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ dos funciones definidas respectivamente por:
$A \longmapsto$ subanillo generado por A, $A \longmapsto$ ideal generado por A.
(«*clausura de anillos*» y «*clausura ideal*» respectivamente)

7) M es un A-módulo, con A un anillo. Sea $\varphi : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ submódulo generado por A. («*clausura de módulos*»)

8) En $\mathbb{R}^n$. Sea $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ envolvente convexa de A. (*envolvente convexa*)

9) E es un grafo. Sea $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ una función definida por:
$A \longmapsto$ {vértices conectados por caminos con A}. («*clausura de grafos*»)

10) V es un lenguaje formal. Sea $\varphi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ una función definida por:
$A \longmapsto A^* =$ {cadenas de concat. de elem. de A}, llamada *clausura de Kleene.*

11) $(D, \leq)$ es un conjunto preordenado. Sea $\varphi : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(D)$ una función definida por:
$A \longmapsto [\leq]_{[D]}(A) = \{x \in D : \exists a \in A \text{ tal que } a \leq x\}$. («*clausura de preordenes*»)

Cada una de estas funciones clausura caracteriza a un espacio deductivo en el ambiente respectivo.

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Pruebe que todos los ejemplos anteriores son efectivamente funciones clausura. Encuentre mapas conocidos de la forma $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ que no sean funciones clausura. ($\star\star$)

Ejercicio 3.2. Encuentre ejemplos de funciones $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ que cumplan la propiedad de extensividad pero no la de tope. Ahora encuentre ejemplos que cumplan la de tope pero no la de extensividad. ($\star\star$)

Ejercicio 3.3. Considere una función $f : \alpha \to \alpha$. ¿En qué casos la función $A \mapsto f(A)$ es una función clausura? ($\star$)

Ejercicio 3.4. Ahora supongamos que tenemos $f, g : \alpha \to \alpha$ funciones. Encuentre condiciones suficientes para que el operador $A \mapsto f(A) \cup g(A)$ sea una función clausura. Generalice para una cantidad finita de funciones. Ejemplifique. ($\star\star$)

Ejercicio 3.5. Considere $\varphi, \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ funciones clausura. ¿ La composición es una función clausura? ($\star\star$)

EJERCICIO 3.6. Pruebe que si $\varphi, \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ conmutan y son funciones clausura entonces su composición es una función clausura. Volveremos sobre este hecho cuando veamos los espacios deductivos de la composición. Generalice el resultado para una cantidad finita de funciones clausura. $(\star\star)$

EJERCICIO 3.7. ¿Es cierto el recíproco de lo anterior? En el siguiente sentido: Si $\varphi, \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ son funciones clausura y además cualquiera de sus composiciones es clausura. Entonces, ¿Conmutan? $(\star\star\star)$

EJERCICIO 3.8. Considere $\varphi, \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ funciones clausura. Pruebe que $\varphi \cup \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ definido como $\varphi \cup \psi(A) := \varphi(A) \cup \psi(A)\ \forall A \subseteq \alpha$, no es una función clausura. Pruebe que para la intersección si se cumple, es decir $\varphi \cap \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ definido como $\varphi \cap \psi(A) := \varphi(A) \cap \psi(A)\ \forall A \subseteq \alpha$, es una función clausura. Más aún, pruebe que esto es cierto para una intersección arbitraria de funciones clausura. $(\star)$

EJERCICIO 3.9. Considere $B \subseteq \alpha$ fijo y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ definida como: $\varphi(A) := A \cup B$. Pruebe que es una función clausura. Observe que tomando a B convenientemente se obtienen los espacios deductivos discreto y caótico. $(\star)$

EJERCICIO 3.10. Sean $\varphi, \psi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ funciones clausura. ¿Es $\varphi \times \psi : \mathcal{P}(\alpha \times \alpha) \to \mathcal{P}(\alpha \times \alpha)$ definida como $\varphi \times \psi(A) := \varphi(p_1(A)) \times \psi(p_2(A))$ una función clausura? Donde p_1, p_2 son las respectivas proyecciones y teniendo que $A \subseteq \alpha \times \alpha$. $(\star\star\star)$

Capítulo 4

Subespacios Deductivos

```
"Un matemático es un dispositivo
que transforma café en teoremas."
-Alfréd Rényi
```

4.1. Definición y Generalidades

Si el lector observa detenidamente los ejemplos del capítulo anterior se da cuenta de que los elementos que pertenecen a la imagen de las funciones clausura son conjuntos notables en el sentido de que corresponden a subestructuras específicas dentro de cada ambiente considerado. Por ejemplo, en el caso de los grupos, las funciones clausura consideradas dan subgrupos; en los espacios vectoriales dan subespacios vectoriales; en los espacios topológicos corresponden a conjuntos cerrados, etc. Esto motiva fuertemente la siguiente:

DEFINICIÓN 4.1 (Subespacio Deductivo). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Sea $S \subseteq \alpha$. Diremos que S es un *subespacio deductivo* de (α, δ) sii $\exists G \subseteq \alpha$ tal que $\delta_{[\alpha]}(G) = S$.

Es decir, si está en la imagen de la función clausura del espacio i.e. $S \in Im(\delta_{[\alpha]})$.

OBSERVACIÓN 4.1. Los ejemplos fueron los motivadores de esta definición y aunque es redundante especificarlos, aquí van. En el ambiente respectivo los siguientes son subespacios deductivos: subgrupos, subespacios vectoriales, cerrados, conexos, compactos, submódulos, ideales, convexos, ...

OBSERVACIÓN 4.2. El lector debe intuir que de la misma manera que un subgrupo puede considerarse en sí mismo un grupo, y un subespacio vectorial puede considerarse un espacio vectorial, etcétera; de la misma manera podrá considerarse una definición de espacio deductivo relativo que permita ver al subespacio deductivo como otro espacio deductivo con estructura heredada. Esta definición deberá a su vez permitir la conciliación de esta observación con los ejemplos anteriores. Esta definición, a diferencia de lo que ocurre cuando se intenta forzar subestructuras (como en el caso de las topologías relativas), viene dada por la simple restricción conjuntista. Más adelante el lector notará que esta *naturalidad* proviene de la relación de los subespacios deductivos con el operador intersección ($\bigcap$), que es el que se usa típicamente para considerar subestructuras minimales que preserven ciertas propiedades. En vista de esto consideramos la siguiente:

DEFINICIÓN 4.2 (Espacio Deductivo Relativo). Sea (α, δ) un espacio deductivo y sea $S \subseteq \alpha$ un subespacio deductivo.

Definamos a su vez, $\delta_S := \{(A, B) \in \delta : A \subseteq S; B \subseteq S\}$.

Diremos que (S, δ_S) es el *espacio deductivo relativo* a S en (α, δ), o bien, siempre que el ambiente esté claro, diremos que S está dotado del espacio deductivo relativo.

Queda como ejercicio del lector probar que en efecto este es un espacio deductivo.

OBSERVACIÓN 4.3. Ya que la imagen de la función clausura es tan importante en este contexto le pondremos nombre y notación para facilitarnos las cosas:

DEFINICIÓN 4.3 (Soporte). Sea (α, δ) un espacio deductivo.

Diremos que el *soporte* de (α, δ) es la familia de todos los subespacios deductivos de (α, δ).

Y la notación será: $\Omega(\alpha, \delta) := Im(\delta_{[\alpha]})$

4.2. Propiedades

Ahora demostraremos algunas propiedades de las funciones clausura y de los espacios deductivos. Que nos permitirán entender mejor su relación, la manera de estructurar el concepto de espacio deductivo y también como herramientas de futuros resultados de la teoría. Específicamente probaremos la siguiente:

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea (α, δ) un espacio deductivo; y $A, B \subseteq \alpha$. Entonces:*

1. $\delta_{[\alpha]}(A) = \bigcup\{C \subseteq \alpha : (A, C) \in \delta\}$ (la clausura de un conjunto es la unión de todos los conjuntos que este implica)
2. $\delta_{[\alpha]}^2 = \delta_{[\alpha]}$ (idempotencia de la clausura)
3. $A \subseteq B \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(B)$ (monotonía de la clausura respecto de la inclusión)
4. $A \in \Omega(\alpha, \delta) \Leftrightarrow \delta_{[\alpha]}(A) = A$ (los subespacios deductivos son exactamente los conjuntos cerrados bajo la clausura)

5. $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \Omega(\alpha,\delta) \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \in \Omega(\alpha,\delta)$ (la intersección arbitraria de subespacios es subespacio)
6. $\delta_{[\alpha]}(A) = \bigcap\{S \in \Omega(\alpha,\delta) : A \subseteq S\}$ (el subespacio generado por un conjunto -su clausura- es la intersección de todos los subespacios que contienen al conjunto)
7. $\delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \bigcap \Omega(\alpha,\delta)$ (la clausura del vacío -el centro- es la intersección del soporte del espacio deductivo)

Demostración.

1) Observar el lema de Yazlle y el primer teorema de caracterización de espacios deductivos.

2) Tenemos que ver que:
$\delta_{[\alpha]}(\delta_{[\alpha]}(A)) = \delta_{[\alpha]}(A)\ \forall A \subseteq \alpha$:
Sea $A \subseteq \alpha$;
$\delta_{[\alpha]}(\delta_{[\alpha]}(A)) = \bigcup\{B \subseteq \alpha : (\delta_{[\alpha]}(A), B) \in \delta\}$ y $(A, \delta_{[\alpha]}(A)) \in \delta$
$\overset{Ax.II}{\Rightarrow}\ \delta_{[\alpha]}(\delta_{[\alpha]}(A)) = \bigcup\{B \subseteq \alpha : (\delta_{[\alpha]}(A), B) \in \delta\} = \bigcup\{B \subseteq \alpha : (A,B) \in \delta\} = \delta_{[\alpha]}(A)$

3) $A \subseteq B \subseteq \delta_{[\alpha]}(B)$ por hipótesis y por la propiedad de extensividad,
entonces por la propiedad de tope, y ya que $A \subseteq \delta_{[\alpha]}(B)$ se tiene que $\delta_{[\alpha]}(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(B)$ como se quería.

4) $(\Leftarrow)$
Es obvio por definición.
$(\Rightarrow)$
$\exists G \subseteq \alpha | \delta_{[\alpha]}(G) = A$ (*1) $\Rightarrow \delta_{[\alpha]}(\delta_{[\alpha]}(G)) = \delta_{[\alpha]}(A)$
$\Rightarrow \delta_{[\alpha]}(G) = \delta_{[\alpha]}(A)$ por 2. $\Rightarrow A = \delta_{[\alpha]}(A)$ por *1.

5) Sea $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \Omega(\alpha,\delta)$
$\Rightarrow \forall\lambda \in \Lambda \delta_{[\alpha]}(S_\lambda) = S_\lambda$ por 4.
Sea $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$;
y asumamos que $(\{x\},\{y\}) \in \delta$ (*2) con $y \notin \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$.
$\Rightarrow \exists\lambda_0 \in \Lambda / y \notin S_{\lambda_0}$ pero $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$; y entonces; $x \in S_{\lambda_0}$
$\Rightarrow y \in \delta_{[\alpha]}(S_{\lambda_0}) = S_{\lambda_0}$ por *2. Absurdo.
$\Rightarrow \forall D \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$; $\delta_{[\alpha]}(D) \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$

En particular $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$
$\Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \in \Omega(\alpha,\delta)$ por 4.

6) Sea $A \subseteq \alpha$;

Para ver esta igualdad hace falta ver que $\delta_{[\alpha]}(A)$ es un elemento de los que se intersectan, y además que cualquier elemento que se intersecta contiene a $\delta_{[\alpha]}(A)$.

Veamos lo primero: $\delta_{[\alpha]}(A) \in \Omega(\alpha,\delta)$ por definición, y además por la propiedad de tope tenemos $A \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$.

Veamos lo segundo: Sea $S \in \Omega(\alpha,\delta)/A \subseteq S \Rightarrow (S,A) \in \delta \Rightarrow A \subseteq \delta_{[\alpha]}(S) \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(S) = S$

7) Si sustituimos en la propiedad 6 lo siguiente: $A = \emptyset$ obtenemos,
$\delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \bigcap\{S \in \Omega(\alpha,\delta) : \emptyset \subseteq S\} = \bigcap\{S \in \Omega(\alpha,\delta)\} = \bigcap \Omega(\alpha,\delta)$
A este conjunto especial le llamaremos *Centro* del espacio deductivo.

Y diremos que un espacio deductivo es *Puro* si su centro es vacío; i.e. si el conjunto vacío es un subespacio deductivo. □

4.3. Segundo Teorema de Caracterización

De modo que si tenemos un espacio deductivo particular, podemos identificar cuáles son los subespacios deductivos que le corresponden. Ahora, ¿cómo haríamos para realizar el camino inverso? Es decir, si tengo una familia de conjuntos, ¿de qué manera puede uno darse cuenta si son la familia de subespacios deductivos de un espacio deductivo? De eso trata el segundo teorema de caracterización que nos permite identificar una familia con esta propiedad, más aún, nos dice que podemos caracterizar a un espacio deductivo mediante sus subespacios.

TEOREMA 4.1 (Segundo Teorema de Caracterización). *Sea α un conjunto. Sea $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \alpha$. Entonces:*
$\exists!\delta \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha)$ *tal que* $\Omega(\alpha,\delta) = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *sii:*

1. $\alpha \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
2. $\forall\{S_k\}_{k\in I} \subseteq \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda};\ \bigcap\limits_{k\in I} S_k \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

DEMOSTRACIÓN. $(\Rightarrow)$
Fue probado en el punto 5 de la proposición anterior.
$(\Leftarrow)$
Existencia: Para ello vamos a definir la función clausura:
Sea $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ definida como sigue:

$\varphi(A) := \bigcap\limits_{A\subseteq S} \{S \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\}\ \forall A \subseteq \alpha$ es una función clausura:
1) $A \subseteq \varphi(A)$ es obvio por construcción.
2) Sea $B \subseteq \varphi(A)$
y por hipótesis $\varphi(A) \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
Entonces; $\varphi(B) = \bigcap\limits_{B\subseteq S} \{S \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\} \subseteq \varphi(A)$
Sea $\delta = [\varphi]_\alpha$
Veamos que $\Omega(\alpha,\delta) = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$:
$A \in \Omega(\alpha,\delta) \Leftrightarrow \delta_{[\alpha]}(A) = A \Leftrightarrow \varphi(A) = A$
$\Leftrightarrow \bigcap\limits_{A\subseteq S} \{S \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\} = A \Leftrightarrow A \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
Unicidad: Sea $\eta : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función clausura tal que $\Omega(\alpha,[\eta]_\alpha) = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
Sea $A \subseteq \alpha$:
Sabemos que $\Omega(\alpha,[\eta]_\alpha) = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} = \Omega(\alpha,\delta) = \Omega(\alpha,[\varphi]_\alpha)$
$\eta(A) \subseteq \varphi(A)$:
$A \subseteq \varphi(A)$ y $\varphi(A) \in \Omega(\alpha,[\eta]_\alpha)$, entonces $\eta(A) \subseteq \varphi(A)$ por punto 4 de la proposición anterior.
$\varphi(A) \subseteq \eta(A)$:
$A \subseteq \eta(A)$ y $\eta(A) \in \Omega(\alpha,[\varphi]_\alpha)$, entonces $\varphi(A) \subseteq \eta(A)$ también por punto 4 de la proposición anterior.
Por lo tanto, $\varphi = \eta$ y φ es única. □

Observación 4.4. Nuestra notación en el caso de que tengamos una familia de conjuntos que verifique las hipótesis del segundo teorema de caracterización será la siguiente para referirnos al deductor del espacio deductivo inducido: $\delta \stackrel{Not.}{=} [\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]_\alpha$.

El anterior resultado motiva la siguiente definición:

Definición 4.4 (Base). Sea (α,δ) un espacio deductivo.

Diremos que la familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ es una *base* de (α,δ) sii: $\forall S \in \Omega(\alpha,\delta)\ \exists\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $S = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$.

Observación 4.5. Una base cualquiera de un espacio deductivo debe tener al conjunto ambiente. En la notación de arriba: $\alpha \in \mathcal{B}$.

Ejercicios

Ejercicio 4.1. Pruebe que el espacio deductivo relativo es en efecto un espacio deductivo. Pruebe que un subespacio J de un espacio deductivo relativo S de (α,δ), es subespacio también de (α,δ). $(\star\star)$

Ejercicio 4.2. Pruebe que la unión de subespacios deductivos no es subespacio. ($\star$)

Ejercicio 4.3. Observe que en los contextos correspondientes, las familias de subestructuras verifican el segundo teorema de caracterización. Es decir, en cada uno de los ejemplos anteriores, identifique los subespacios. ($\star$)

Ejercicio 4.4. Pruebe que en $(\mathbb{Z}, [|]_{\mathbb{Z}})$, los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ son subespacios pero no recíprocamente. (Ver capítulo 8 para una definición de grupo, para hacer el ejercicio basta con tener en cuenta que los conjuntos de la forma $n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$ con $n \in \mathbb{Z}$ son los subgrupos del grupo de los enteros) ($\star\star$)

Ejercicio 4.5. En cada uno de los ejemplos anteriores de espacio deductivo encuentre el centro. ($\star$)

Ejercicio 4.6. Decimos que una base es minimal sii es base y además cualquier subconjunto de las partes, incluido estrictamente en él no es una base del espacio. Encuentre una base minimal para algunos de los ejemplos vistos de espacio deductivo. ¿Existe siempre una base minimal? ($\star\star$)

Ejercicio 4.7. Suponga que se tiene una familia finita de conjuntos $S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n$, todos incluidos a su vez en un conjunto ambiente α. Observe que esta familia de conjuntos es la familia de subespacios de un espacio deductivo en α. ¿Cuál es su centro? Supongamos ahora que $x \notin S_i \ \forall i$ (es decir, $x \notin S_n$) ¿Qué sucede con la clausura de $\{x\}$? ¿Qué sucede si la familia es infinita numerable? Observe los casos: $\ldots \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n$, $S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$ y $\ldots \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n \subseteq \ldots$. Por último, ¿Qué pasa con una familia arbitraria de conjuntos incluidos dos a dos? ($\star\star$)

Ejercicio 4.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(0) = 0$. Y consideremos la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que existe al menos un punto en ellos cuya imagen por f da cero. Observe que dicha familia no necesariamente verifica el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos. ¿Qué condiciones se pueden imponer a f para que sí se verifique? Observe que si f es inyectiva se verifica. ($\star\star$)

Ejercicio 4.9 (Convexidad Extendida). Sea $k \geq 0$. Diremos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ es k-convexo sii: Para todos $x, y \in C$ tal que existe un segmento S de curvatura constante k que conecta x con y se tiene que $S \subseteq C$.

Pruebe que la familia de los conjuntos k-convexos verifica el segundo teorema de caracterización. La clausura de este espacio deductivo la llamaremos *envolvente k-convexa.* Observe que un conjunto es convexo sii es 0-convexo. $(\star\star\star)$

EJERCICIO 4.10. Sea X un cierto conjunto. Pruebe que la familia de σ-álgebras sobre X verifica el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos. $(\star\star)$

Capítulo 5

Generalizaciones

```
"Todas las generalizaciones
-quizás excepto esta- son falsas."
-Kurt Gödel
```

5.1. Introducción

Al tener ante nosotros la presencia de un operador $\delta_{[\alpha]} : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ para cada espacio deductivo (α, δ). Este induce naturalmente una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(\alpha)$, siendo equivalentes dos conjuntos si sus imágenes vía la función clausura del espacio, son iguales. Es decir,

Definición 5.1 (Cociente Natural). Sea (α, δ) un espacio deductivo y $A, B \subseteq \alpha$ conjuntos.

Diremos que $A \overset{\delta}{\approx} B$ sii $\delta_{[\alpha]}(A) = \delta_{[\alpha]}(B)$.

Las definiciones en cualquier teoría matemática corresponden a una colección de afirmaciones bajo un nombre particular, y se dirá que dos definiciones son equivalentes si se puede implicar mediante ellas, el mismo conjunto de afirmaciones. El lector podrá notar fácilmente que podemos identificar el conjunto cociente con la familia de subespacios del espacio deductivo en cuestión. De manera que identificaremos a una *definición* con el subespacio que corresponde a todas las afirmaciones que puede implicar. Específicamente nos interesa identificar a una estructura teórica, al menos de manera provisional, con un espacio deductivo; así como también relacionar estos mediante algún mapa que nos oriente en el caso de que tengamos una teoría que es más general que otra y que nos permita substraer siempre que fuese posible, las definiciones que corresponden a una generalización de los conceptos de la teoría menos general. La forma de hacer esto sería considerar una operador con ciertas propiedades:

Definición 5.2 (Traductor). Sean (α, δ) y (β, γ) espacios deductivos. Decimos que el mapa $\phi : \alpha \to \beta$ es un *traductor desde*

δ *hasta* γ (o simplemente *traductor,* cuando los espacios deductivos considerados sean sobreentendidos) sii:

1. ϕ es un mapa inyectivo.
2. La imagen de ϕ respeta las clausuras, es decir, $\forall A \subseteq \alpha$ $\phi(\delta_{[\alpha]}(A)) = \gamma_{[\beta]}(\phi(A))$.

Definición 5.3 (Relación «más o igualmente general que»). Sean (α, δ) y (β, γ) espacios deductivos. Decimos que (α, δ) es *más o igualmente general que* (β, γ) sii: existe un traductor $\phi : \alpha \to \beta$ desde δ hasta γ. Nuestra notación será: $(\alpha, \delta) \gg (\beta, \gamma)$. (Más tarde veremos que esto no es un orden parcial sino simplemente un preorden)

Como sugiere la anterior definición, nos interesa traducir conceptos de un espacio a otro. Es claro, sin embargo, que dado un traductor entre dos espacios deductivos, el sentido natural del mapeo desde uno a otro proporciona un significado automático a las definiciones que tienen lugar en el primer espacio, obteniendo un significado claro en el espacio imagen. Es por esta razón que lo que en realidad nos interesa es el camino inverso a ese. Es decir, si tengo una definición en el espacio menos general, quisiera obtener una definición en el espacio más general, que al traducirla me devuelva la definición con la que empecé. Más concisamente, nos interesa *generalizar* definiciones, siempre que esto sea posible. Sin embargo, no siempre será simple o posible la obtención de definiciones en el espacio más general que al traducirla me den *exactamente* la definición con la que empezamos. Usualmente nos tenemos que conformar con generalizaciones que al traducirse consisten en condiciones *necesarias* para que el concepto generalizado tenga lugar. Tomemos por ejemplo el caso de la definición de isometría entre dos espacios métricos; la generalización topológica es por supuesto una función continua. Es sabido sin embargo, que una función continua entre dos espacios métricos no tiene toda la información de una isometría, más específicamente, no alcanza con que una función sea continua. Pero la función continua es una *generalización*, de modo que se deberá diferenciar las generalizaciones que al traducirse decantan en definiciones *equivalentes* a la que se pretende generalizar, y las que decantan en definiciones que son condiciones *necesarias* para que el concepto tenga lugar. Siendo que las segundas son un caso más general, nos interesa definir el concepto de generalización en el sentido de la segunda forma. Cuando ocurra lo primero, diremos que la generalización es *completa*. Formalicemos todo esto:

DEFINICIÓN 5.4 (Definición). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Decimos que una *definición* en (α, δ) es un elemento de la clase de equivalencia del cociente natural. Es decir, el conjunto de definiciones es: $\dfrac{\mathcal{P}(\alpha)}{\underset{\approx}{\delta}}$.

Hay que observar que las clases de equivalencia se pueden identificar con los subespacios deductivos del espacio. Es decir, la proyección al cociente y la función clausura del espacio resultan dos formas distintas de interpretar la misma estructura. O también podemos decirlo así: podemos encontrar una biyección (canónica) a la que llamaremos *identificador* $\psi_{(\alpha,\delta)} : \dfrac{\mathcal{P}(\alpha)}{\underset{\approx}{\delta}} \to \Omega(\alpha, \delta)$ que permite hacer conmutar el triángulo formado por la proyección canónica al cociente y la función clausura del espacio. Por supuesto tenemos lo siguiente: $\psi_{(\alpha,\delta)} = \delta_{[\alpha]} \circ \pi^{-1}$, siendo π la proyección canónica al cociente natural, y además notando que esto está bien definido ya que la preimagen de cualquier elemento en el cociente, tiene misma imagen bajo la clausura.

DEFINICIÓN 5.5 (Generalización). Sean (α, δ) y (β, γ) espacios deductivos. Y sea también $\phi : \alpha \to \beta$ un traductor desde δ hasta γ.

Diremos que $G \in \dfrac{\mathcal{P}(\alpha)}{\underset{\approx}{\delta}}$ es una *generalización* de $D \in \dfrac{\mathcal{P}(\beta)}{\underset{\approx}{\gamma}}$ a través de ϕ sii: $\phi \circ \psi_{(\alpha,\delta)}(G) \subseteq \psi_{(\beta,\gamma)}(D)$.

Si ocurre que la inclusión en esta definición es, de hecho, una igualdad diremos que la generalización es *completa*.

El signo de inclusión resulta de crucial importancia en el significado de la definición de generalización tomando en cuenta lo dicho anteriormente. Es decir, buscamos que la traducción de la generalización sea una condición necesaria.

El lector notará rápidamente que las generalizaciones completas no son posibles sobre todas las definiciones del espacio imagen. Es claro que tampoco hay unicidad debido a que podré encontrar generalizaciones que se traduzcan como diferentes condiciones necesarias del concepto. Los ejemplos de esto son bastante interesantes ya que expresan diferentes formas de enmarcar un mismo concepto. O bien, más simple, se puede generalizar un concepto de muchas maneras. El ejemplo más clásico de esta cuestión es el de las integrales, como se sabe el concepto formal inicial de integral es debido a Riemann, pero como responde muy a groso modo a saber «el área bajo una curva» de una función, es claro que admite otra interpretación, y quizá otras, como la propuesta por Lebesgue. Que por supuesto se podrá decir que es más amplia ya que permite su aplicación en espacios más generales, aún así no es más amplia si hablamos con plena formalidad, ya que existen ejemplos donde ambas difieren. El ejemplo más conocido de esta dicotomía es la integral impropia: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x} dx = \pi$, la igualdad es tal con la integral Riemann, sin embargo no existe con la de Lebesgue. A pesar de todo esto, en espacios más *buenos*, por supuesto ambas coinciden. Así tenemos dos atinadas generalizaciones del «área bajo la curva», que, como conceptos, son distintos. Sin embargo, si existe una generalización completa, debe ser única a menos de equivalencia natural del espacio, esto es así porque los traductores son inyectivos al restringirlos al soporte del espacio y porque el identificador también es inyectivo.

PROPOSICIÓN 5.1. *El operador imagen de un traductor, restringido al soporte es también inyectivo y su imagen está contenida en el soporte del espacio imagen.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (α, δ) y (β, γ) espacios deductivos y $\phi : \alpha \to \beta$ un traductor desde δ hasta γ. Veamos que $\phi : \Omega(\alpha, \delta) \to \Omega(\beta, \gamma)$ es inyectivo. (Aquí estamos haciendo un abuso de notación denotando al operador imagen con el mismo símbolo que el traductor).

Veamos primero que si tomamos la imagen de un subespacio obtenemos otro subespacio en el espacio imagen: Dado $S \in \Omega(\alpha, \delta)$ tenemos que $\delta_{[\alpha]}(S) = S$, y por lo tanto $\phi(\delta_{[\alpha]}(S)) = \phi(S)$ y sabemos que ϕ es un traductor, entonces $\gamma_{[\beta]}(\phi(S)) = \phi(\delta_{[\alpha]}(S)) = \phi(S)$. Es decir, $\phi(S) \in \Omega(\beta, \gamma)$.

Veamos que es inyectivo: Supongamos que tenemos $S, T \in \Omega(\alpha, \delta)$ tales que $\phi(S) = \phi(T)$, la inyectividad del traductor como función de α a β permite implicar que $S = T$; es decir, $x \in S \Leftrightarrow \phi(x) \in \phi(S) \Leftrightarrow \phi(x) \in \phi(T) \Leftrightarrow x \in T$; la doble implicación del medio es por la igualdad $\phi(S) = \phi(T)$ con la que empezamos, y las otras dos son para un lado por la inyectividad de ϕ y hacia el otro por simple definición de la imagen de una función. $\square$

Nos hace falta los ejemplos, para ello vamos a hacer una observación que nos permitirá obtener muchísimos traductores en general en el quehacer matemático, además de obtenerlos también en un contexto que no escapa de la teoría deductiva y que nos permita avanzar e investigar conceptos que fueron fundados en principio en otras ramas de la matemática.

Observación 5.1. Siempre que tengamos dos teorías matemáticas, donde una se puede inmiscuir en la otra de modo que la primera resulte en una generalización de algún tipo de la segunda, podremos identificar muy claramente al traductor de la primera a la segunda que permite, con toda naturalidad, reescribir afirmaciones matemáticas que tienen un sentido claro en la primer teoría, teniendo un sentido unívoco en la segunda teoría. El primer traductor que quiero presentarles es el primero que me fue presentado con plena formalidad en un ambiente universitario y que cualquier estudiante de la carrera de matemática identificará con claridad. Se trata del hecho de que los espacios topológicos son una *generalización* de los espacios métricos. Estudiaremos en detalle esta generalización, lo que luego nos permitirá dar un salto que nos llevará a un desarrollo pleno y vertiginoso de la teoría deductiva. No es redundante decir que esta visión formalizadora de las generalizaciones matemáticas es entendida de forma meta-teórica en la práctica común de la matemática; es así como este libro tiene por uno de sus objetivos la búsqueda de la formalidad y el rigor de la noción de *generalización*.

5.2. Topología y Espacios Métricos

Para entender completamente el concepto de generalización hace falta conocer algún ejemplo ilustrativo que nos permita orientarnos e identificar aquellas propiedades que, si se vieran sólo de manera abstracta, resultarían obscuras e inútiles. Es por ello que nos interesa dar un ejemplo contundente de generalización. En este sentido definiremos y estudiaremos, saliéndonos un poco del desarrollo de la teoría deductiva, los conceptos de espacio topológico y espacio métrico, y de como el primero resulta en una generalización del segundo. De hecho, históricamente la topología se crea en un intento de obtener una manera alternativa de expresar la noción de límite, o si se quiere, la «cercanía» o el «entorno»; abstrayendo y desembarazándose del concepto de distancia. El lector que desee profundizar en el estudio de los espacios métricos y los espacios topológicos podrá encontrar en línea mucho material disponible ya que se trata de conceptos bastante familiares. Nos centraremos aquí en aquellos aspectos que nos permitirán obtener intuición sobre las nociones que se pretende formalizar.

Definición 5.6 (Espacio Métrico). Diremos que el par (M, d) es un *espacio métrico* sii: M es un conjunto. Y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ es una función, que llamaremos *distancia*, que verifica las siguientes propiedades:

$\forall x, y, z \in M$

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

DEFINICIÓN 5.7 (Espacio Topológico). Diremos que el par (X, τ) es un *espacio topológico* sii: X es un conjunto. Y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una familia de conjuntos, que llamaremos *topología*, y que verifica las siguientes propiedades:

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $\forall \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \tau; \ \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \in \tau$
3. $S_1, \ldots, S_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} S_i \in \tau$

Cuando uno las mira a primera vista parecen definiciones de estructuras muy disimiles, o por lo menos, que no tienen una relación demasiado evidente. La relación surge al estudiar el concepto de conjunto *abierto*, (este a su vez surge del concepto de *bola abierta*, que no nos interesa particularmente) en el contexto de los espacios métricos:

DEFINICIÓN 5.8 (Conjunto Abierto). Sea (M, d) un espacio métrico. Diremos que $A \subseteq M$ es un conjunto *abierto* sii: $\forall x \in A \ \exists \epsilon > 0$ número real, tal que: $\forall y \in M$, si $d(x,y) < \epsilon$ entonces $y \in A$.

Esta definición tiene un significado específico en el contexto de los espacios métricos porque fue definido usando su estructura. Sin embargo, la familia de abiertos de un espacio métrico es una topología en M. Es decir, verifica las propiedades 1,2 y 3 de la definición de espacio topológico. (La prueba queda a cargo del lector)

El punto importante y esencial a notar es que esto induce un traductor entre las afirmaciones hechas en contexto de espacios topológicos y afirmaciones hechas en contexto de espacios métricos.

El traductor es el siguiente: tomamos una afirmación del contexto topológico y cambiamos el *«pertenece a la topología»* por *«es un conjunto abierto»*.

$\mu : [A \in \tau] \longmapsto [A\,es\,abierto]$

El lector notará fácilmente que este traductor en el contexto meta-teórico respeta la definición, es decir, es inyectivo pues dos afirmaciones distintas no podrán traducirse hacia una misma afirmación y además la traducción respeta la estructura deductiva de las afirmaciones: será lo mismo que yo implique y luego traduzca a que lo haga en el orden inverso.

Invito al lector a considerar cualquier definición o afirmación topológica y está se podrá traducir y tendrá sentido y valdrá respectivamente también en el contexto métrico. Lo curioso es, sin embargo, que cualquier concepto que vale la pena considerar en el contexto topológico, existe como *generalización completa*, en el sentido que se acaba de definir en la sección previa. Por ejemplo: Conjunto Cerrado, Clausura, Entorno, Interior, punto de acumulación, etc. Sin embargo hay conceptos que no se pueden generalizar de forma completa a través de este traductor, es decir, no se puede encontrar una definición que traducida nos devuelva el concepto original. Por ejemplo: Sucesión de Cauchy, Completitud, Bola abierta, Bola cerrada, etc. Este tipo de definiciones que no admiten una generalización completa las llamaremos *«definiciones incomprensibles respecto de μ»*, o simplemente *«definiciones incomprensibles»* si el contexto es sobreentendido. Sin embargo no tiene sentido preguntar si una definición se puede generalizar respecto de un traductor ya que siempre podré encontrar generalizaciones triviales, utilizando condiciones necesarias lo suficientemente débiles. En el caso de las generalizaciones completas el traductor será sobreentendido respecto del contexto más general, la in/comprensibilidad se nombrará respecto de dicho contexto. Por ejemplo: La definición de Completitud es una definición *topológicamente incomprensible*. La definición de Conjunto Cerrado es una definición *topológicamente comprensible*. La definición de Isometría es *topológicamente incomprensible* (aún cuando existe una clara generalización no completa mediante las funciones continuas).

Ahora vayamos al meollo del asunto, nos interesa saber si es posible la generalización completa de la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5.9 (Límite de una sucesión (espacios métricos)). Sea (M, d) un espacio métrico. Sea $s_n : \mathbb{N} \to M$ una sucesión y $L \in M$.

Diremos que $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ sii: $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $d(s_n, L) < \epsilon$.

A simple vista se nos pinta como una definición topológicamente incomprensible. ¿Cómo definir un límite, algo que depende tanto de la noción de cercanía, sin la ayuda de la función distancia?

La generalización, como es bien sabido, es la siguiente:

DEFINICIÓN 5.10 (Límite de una sucesión (espacios topológicos)). Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $s_n : \mathbb{N} \to X$ una sucesión y $L \in X$.

Diremos que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$ sii: $\forall A \in \tau$ con $L \in A$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0\ s_n \in A$.

Al aplicar la traducción, obtenemos una afirmación equivalente a la definición de límite de una sucesión en el contexto de espacios métricos. La prueba queda a cargo del lector.

5.3. Espacio Asociado y Transformadores

De manera que tenemos un traductor $\mu : top \to met$, que es un operador inyectivo y que respeta la estructura deductiva, donde aquí estamos tratando con *afirmaciones*. Pero además, por ser una conexión entre conceptos, provee de forma automática un operador $\Phi^\mu : MET \to TOP$, que transforma cada espacio métrico en un espacio topológico de forma natural, es claro que este operador no es ni inyectivo (ya que dos espacios métricos distintos pueden inducir la misma topología), y tampoco es sobreyectivo (ya que no todo espacio topológico proviene de un espacio métrico en este sentido).

Este operador asociado al traductor le llamaremos *transformador*.

Nuestro objetivo en esta sección será aclarar esto, es decir, nos interesa considerar un traductor entre espacios deductivos y formalizar el concepto de *transformador*.

Para ello nos preguntamos cuál es la relación entre met: las afirmaciones en la teoría de espacios métricos; y MET la categoría (o colección) de espacios métricos. Y equivalentemente para el caso de la topología.

La pregunta iluminadora aquí es: ¿cuál es la relación entre el concepto de espacio métrico y un ejemplo de espacio métrico?

Y ya hemos notado que cualquier ejemplo de una teoría queda caracterizado por la traducción que induce el ejemplo desde la teoría original al ejemplo particular. En este sentido se desprende el hecho de que para cada elemento m de MET, existe un traductor $m : met \to m$ que es canónico en este contexto, osea que lo podemos identificar con el propio espacio métrico. De manera que MET se puede caracterizar mediante la colección de traductores desde met.

Formalicemos esto,

Definición 5.11 (Espacio Asociado). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Llamaremos *Espacio Asociado* a (α, δ) a la colección:

$[\alpha]^\delta := \{\phi : \alpha \to \beta$ traductor desde δ hacia γ: (β, γ) espacio deductivo$\}$

Construyamos ahora el transformador correspondiente: $\Phi^\mu : MET \to TOP$. Es decir, tenemos que tomar cualquier traductor desde met,

$m : met \to m$ y con ello poder obtener un traductor desde top hasta m.

Pero en nuestro contexto esto resulta evidente porque el traductor $\mu : top \to met$ permite inducir por composición un traductor hacia cada ejemplo de espacio métrico. Es decir, tenemos: $top \overset{\mu}{\to} met \overset{m}{\to} m$, y por lo tanto $(top \overset{m\circ\mu}{\to} m) \in TOP$

Formalizando obtenemos:

Definición 5.12 (Transformador). Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos. Y sea $\phi : \alpha \to \beta$ un traductor desde δ hacia γ.

Diremos que el *transformador asociado* a ϕ es: $\Phi^{\phi} : [\beta]^{\gamma} \to [\alpha]^{\delta}$ definido por:

$\Phi^{\phi}(\varphi) := \varphi \circ \phi$

La consideración de un transformador por fuera, o desligado en principio, del traductor que lo induce no será observado en este texto. Esto porque los espacios asociados adquieren estructura de los mismos, y además porque en los casos meta-teóricos, la transformación entre espacios es clara cuando se ha identificado al traductor. Establecer o considerar operadores entre espacios asociados que no provengan de traductores no nos interesa particularmente aunque queda abierta la cuestión de qué propiedades deben pedirse a un operador de este estilo para que constituya un transformador.

Observación 5.2. Todo esto a su vez motiva la siguiente observación: En el caso anterior de las topologías y los espacios métricos, hay ya una definición para aquellas topologías para las cuales existe un espacio métrico que la induce. Las llamamos topologías *metrizables*. Pero nos gustaría tener un nombre que no dependa del contexto más que por el traductor particular que identifica a la relación entre las teorías. En este sentido motivamos la siguiente:

Definición 5.13 (Espacio Asociado Compatible). Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos. Y sea $\phi : \alpha \to \beta$ un traductor desde δ hacia γ junto con su transformador asociado $\Phi^{\phi} : [\beta]^{\gamma} \to [\alpha]^{\delta}$.

Diremos que un espacio $e \in [\alpha]^{\delta}$ es *ϕ-compatible* (o bien, *compatible con ϕ*) sii: $\exists j \in [\beta]^{\gamma}$ tal que $\Phi^{\phi}(j) = e$. Es decir, sii existe un espacio asociado en la otra teoría, cuya imagen por el transformador devuelva el espacio en cuestión.

Observación 5.3. A partir de aquí diremos topología «μ-compatible», en vez de topología «metrizable».

Ejercicios

EJERCICIO 5.1. Pruebe que la composición de traductores es un traductor y que la identidad es traductor. (Pruebe que la relación $\ll$ es un preorden.) ($\star$)

EJERCICIO 5.2. Encuentre otros ejemplos de conceptos que son generalizaciones de otros conceptos. ($\star\star\star$)

EJERCICIO 5.3. Encuentre traductores entre varios de los ejemplos anteriores de espacios deductivos. En particular encuentre una traducción entre el espacio deductivo inducido por la clausura topológica usual de $\mathbb{R}$ y el espacio deductivo inducido por la misma clausura en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Y recíprocamente, pruebe que existe una traducción (canónica) entre un intervalo abierto y $\mathbb{R}$. Más adelante se verá una generalización de esto. ($\star\star$)

EJERCICIO 5.4. Intente describir los espacios asociados a los siguientes espacios deductivos: $\mathbb{Z}$ con el preorden «divide», el espacio deductivo discreto, el espacio deductivo caótico, el inducido por la clausura topológica usual de $\mathbb{R}$. ($\star\star\star\star$)

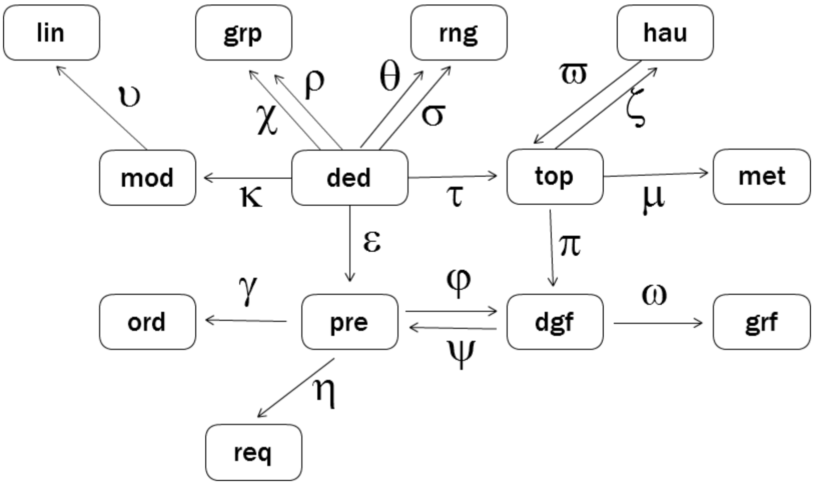
EJERCICIO 5.5. Sea (α, δ) un espacio deductivo. Considere $\delta^{op} := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : (B, A) \in \delta\}$. Muestre que δ^{op} no necesariamente es un deductor en α. ¿Qué debe ocurrir para que lo sea? ($\star\star\star$)

Parte 2

Diagrama Fundamental de Traductores

En esta sección consideraremos y diagramaremos los ejemplos más importantes de traductores entre teorías matemáticas. Explicitando cada uno de ellos. Los traductores del diagrama son los considerados por este texto como *canónicos*, en el caso de que se esté hablando de otra traducción que relaciona a dos de cualquiera de estas teorías, se explicitará debidamente.

Convención: En el sentido de la generalización respecto de un traductor arbitrario conseguiremos ciertas definiciones; estas definiciones llevarán por prefijo el nombre del traductor correspondiente para explicitar su proveniencia, esta será una convención usada ampliamente en este texto. A su vez, el nombre de cada traductor en el diagrama servirá también como una convención de nomenclatura para los mismos.



$$
ded - \text{Esp. Ded.} \left\{ \begin{array}{lll}
\overset{\tau}{\to} & top - \text{Topologías} & \left\{ \begin{array}{ll} \overset{\mu}{\to} & met - \text{Esp. Métricos} \\ \underset{\zeta}{\overset{\varpi}{\rightleftarrows}} & hau - \text{Esp. Hausdorff} \\ \overset{\pi}{\to} & dgf - \text{Grafos Dirigidos} \end{array} \right. \\
\underset{\chi}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} & grp - \text{Grupos} & \\
\overset{\varepsilon}{\to} & pre - \text{Preordenes} & \left\{ \begin{array}{ll} \overset{\gamma}{\to} & ord - \text{Ordenes} \\ \overset{\eta}{\to} & req - \text{Rel. de Eq.} \\ \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & dgf - \text{Graf. Dirigidos} \end{array} \right. \\
\underset{\sigma}{\overset{\theta}{\rightrightarrows}} & rng - \text{Anillos} & \\
\overset{\kappa}{\to} & mod - \text{Módulos} & \left\{ \overset{\nu}{\to} \quad lin - \text{Esp. Vectoriales} \right.
\end{array} \right.
$$

Se debe observar que en el diagrama estamos hablando de las *teorías* correspondientes y no de las colecciones o clases de objetos de dichas teorías; en otras palabras *ded* codifica la teoría deductiva, *top* codifica la teoría de espacios topológicos, *grp* codifica la teoría de grupos, etc.; todos interpretándolos como espacios deductivos en un sentido meta-teórico.

La definición explícita de los traductores canónicos será realizada en lo que resta del texto: usaremos primero el capítulo 6 para las generalizaciones intensas y luego procederemos a definir toda la maquinaria de traductores y la teoría que se desprende de las generalizaciones vía cada traductor: τ en el capítulo 7, ρ en el capítulo 8, ε en el capítulo 9, θ y κ en el capítulo 10.

$\tau : ded \to top$ se define como:
[A es subespacio deductivo] $\mapsto$ [A^c está en la topología]

$\rho : ded \to grp$ se define como:
[A es subespacio deductivo] $\mapsto$ [A es subgrupo]

$\chi : ded \to grp$ se define como:
[A es subespacio deductivo] $\mapsto$ [A es normal]

$\varepsilon : ded \to pre$ se define como:
$[(A,B) \in \delta] \mapsto [\forall b \in B \exists a \in A$ tal que $a \leq b]$, donde δ es el deductor del espacio deductivo y $\leq$ es la relación de preorden.

$\theta : ded \to rng$ se define como:
[A es subespacio deductivo] $\mapsto$ [A es subanillo]

$\sigma : ded \to rng$ se define como:
$[A$ es subespacio deductivo$] \mapsto [A$ es ideal$]$

$\kappa : ded \to mod$ se define como:
$[A$ es subespacio deductivo$] \mapsto [A$ es submódulo$]$

$\mu : top \to met$ se define como:
$[A$ está en la topología$] \mapsto [A$ es un conjunto abierto$]$

$\varpi : top \to hau$ se define como:
$[A$ está en la topología$] \mapsto [\forall x \in A,\ A$ es entorno de $x]$

$\zeta : hau \to top$ se define como:
$[A$ es entorno de $x] \mapsto [\exists H$ en la topología, tal que $x \in H \subseteq A]$

$\pi : top \to dgf$ se define como:
$[x \in \overline{A}] \mapsto [\exists a \in A, \exists c_1, \ldots, c_n$ tales que $a \to c_1 \to \ldots \to c_n \to x]$ asumimos que en los grafos dirigidos cada vértice tiene una flecha sobre sí mismo.

$\omega : dgf \to grf$ se define como:
$[x \to y] \mapsto [x \leftrightarrow y]$ donde x, y son vértices, la flecha es una arista dirigida y la flecha doble es simplemente una arista del grafo.

$\gamma : pre \to ord$ se define como:
$[a \leq b] \mapsto [a \leqq b]$ donde las relaciones son respectivamente el preorden y el orden.

$\eta : pre \to req$ se define como:
$[a \leq b] \mapsto [a \approx b]$ donde las relaciones son respectivamente el preorden y la relación de equivalencia.

$\varphi : pre \to dgf$ se define como:
$[a \leq b] \mapsto [\exists c_1, \ldots, c_n$ tales que $a \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b]$

$\psi : dgf \to pre$ se define como:
$[a \to b] \mapsto [a \leq b]$

$\nu : mod \to lin$ se define como:

$[(a \star b) \bullet c] \mapsto [(a+b) \cdot c]$ donde $\star$ y $\bullet$ son respectivamente la suma y multiplicación en el módulo, y donde $+$ y $\cdot$ son respectivamente la suma y la multiplicación del espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 5.4. Observe que ahora podemos explicar la razón de la definición del capítulo 1: «compatible con ε».

Capítulo 6

Generalizaciones Deductivas

```
"Cuanto más se desarrolla una teoría matemática,
más armoniosa y uniforme procede su construcción,
y relaciones insospechadas se dan a conocer entre,
hasta el momento, ramas separadas de la ciencia."
-David Hilbert
```

Nos interesa dar a conocer todos aquellos conceptos que consisten en generalizaciones *intensas* de otras teorías sobre el contexto de la teoría deductiva, en el sentido de que una definición resulta la generalización de *muchos conceptos* provenientes de varias estructuras teóricas. Es por lo tanto que las definiciones de este capítulo son todas motivadas por conceptos y desarrollos teóricos siempre repetidos. En las proposiciones de intensidad sólo explicitamos las generalizaciones vía los traductores principales tratados en este texto, a saber, τ, ρ, ε, θ, κ; y dejaremos a cargo del lector las demás pruebas de intensidad respecto de las otras teorías del diagrama.

6.1. Función Deductiva

La función deductiva vendría a hacer las veces de morfismo de grupo en teoría de grupos, función continua en espacios topológicos, aplicaciones lineales en espacios vectoriales.

Definición 6.1 (Función Deductiva). Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos.

Diremos que una función $d : \alpha \to \beta$ es *deductiva* sii:
$\forall S \in \Omega(\beta, \gamma)\ d^{-1}(S) \in \Omega(\alpha, \delta)$.

La siguiente proposición se considera suficiente motivación de esta definición.

Proposición 6.1 (Primer Proposición de Intensidad). *El concepto de función deductiva es generalización de las siguientes definiciones: continuidad (a través de τ), morfismo de grupo (a través* *de ρ), aplicación monótona (a través de ε), morfismo de anillos (a través de θ) y morfismo de módulos (a través de κ).*

Demostración. Observar que todos son conceptos sobre la teoría deductiva (*ded*).

Comencemos con la prueba:

Parte 1 (Continuidad):

Explicitemos con claridad la definición de continuidad de una aplicación entre dos espacios topológicos (X, τ_X), (Y, τ_Y).

Diremos que una función $f : X \to Y$ es *continua* sii: $\forall A \in \tau_Y$ $f^{-1}(A) \in \tau_X$ (todo abierto en Y tiene preimagen por f también abierta) (1)

Veamos que es una generalización de función deductiva a través de $\tau : ded \to top$:

Para ello consideremos primero el transformador asociado a τ, $\Phi^\tau : TOP \to DED$ que transforma espacios topológicos en espacios deductivos.

Tenemos $(X, \tau_X) \overset{\Phi}{\mapsto} (X, s_X(\tau_X)) =: (X, \delta)$ y también $(Y, \tau_Y) \overset{\Phi}{\mapsto} (Y, s_Y(\tau_Y)) =: (Y, \gamma)$, lo último en cada uno respectivamente es para agilizar la notación.

La definición es la siguiente: $f : X \to Y$ verifica que: $\forall S \in \Omega(Y, \gamma)$ $f^{-1}(S) \in \Omega(X, \delta)$ (*)

Veamos que esta definición traduce en continua a través de τ (con lo que probaríamos que es una generalización, y por tanto mereciendo el nombre de τ-continuidad):

Por supuesto que al traducir esta definición vía τ obtenemos los siguiente:

$f : X \to Y$ verifica que: $\forall S$ cerrado en Y, $f^{-1}(S)$ es cerrado en X. (2)

Aunque es bien sabido por los estudiantes de topología, veremos que esto es equivalente a la continuidad de f:

$* \Rightarrow 2$: Sea S cerrado en Y, entonces S^c es abierto en Y, luego como se verifica (1) tenemos que $f^{-1}(S^c)$ es abierto en X, por propiedades de la imagen inversa tenemos que $(f^{-1}(S))^c$ es abierto en X (ya que $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$), por lo tanto $f^{-1}(S)$ es cerrado en X.

$2 \Rightarrow *$: Sea S en $\Omega(Y, \gamma)$, es decir, S un cerrado en Y, y como se acaba de probar, esto implica que $f^{-1}(S)$ es cerrado en X, lo que es lo mismo que decir que $f^{-1}(S)$ está en $\Omega(X, \delta)$.

El lector debe observar que este es un caso muy particular, la flecha de vuelta es la que prueba que en efecto la definición es una generalización. La flecha de ida muestra que dicha generalización es completa. Ya que la traducción es equivalente a la definición en cuestión.

Parte 2 (Morfismo de grupo):

Tomemos ahora dos grupos X, Y y entre ellos un morfismo de grupos $f : X \to Y$.

Consideremos el transformador correspondiente a ρ, $\Phi^\rho : GRP \to DED$.

Veamos que $f : \Phi^\rho(X) \to \Phi^\rho(Y)$ es deductiva:

Es decir, probemos lo siguiente: $\forall S$ subgrupo de Y, $f^{-1}(S)$ es subgrupo de X.

(De hecho a partir de aquí, probaremos lo siguiente en cada caso: $\forall S$ subestructura de Y, $f^{-1}(S)$ es subestructura de X, siendo $f : X \to Y$ el operador en cuestión y siendo «subestructura» aquel concepto imagen de «subespacio deductivo» a través del traductor en cuestión)

Sea S subgrupo de Y, tenemos que ver que $f^{-1}(S)$ es subgrupo de X:

Para ellos probemos las tres propiedades de un subgrupo:

1) $0 \in f^{-1}(S)$: Como S es subgrupo tenemos que $0 \in S$, y por ser f morfismo de grupos, tenemos que $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ luego $f(0) = 0$, y por lo tanto $0 \in f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(S)$.

2) Veamos que $f^{-1}(S)$ es cerrado bajo la suma: Sean $a, b \in f^{-1}(S)$, luego $f(a), f(b) \in S$ y como es grupo tenemos que $f(a) + f(b) \in S$, luego $f(a + b) = f(a) + f(b) \in S$ y por lo tanto $a + b \in f^{-1}(S)$.

3) Dado cualquier elemento en $f^{-1}(S)$, su opuesto también está allí: Sea $a \in f^{-1}(S)$, entonces $f(a) \in S$ entonces $-f(a) \in S$, pero tenemos que $f(-a)$ es opuesto a $f(a)$ porque $f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0) = 0$, por la unicidad del opuesto tenemos que $-f(a) = f(-a)$ por lo tanto $-a \in f^{-1}(S)$.

Parte 3 (Aplicación Monótona):

Para hacer esta prueba necesitamos identificar a las subestructuras de los preordenes. Y estas son los *conjuntos superiores:* Sea $(\alpha, \leq)$ un conjunto con un preorden. Decimos que un subconjunto $S \subseteq \alpha$ es un *conjunto superior* sii: $x \in S$, $y \in \alpha$ y $x \leq y$ implica $y \in S$. Para observar que esto ocurre así basta tomar la traducción de un subespacio deductivo sobre la teoría del preorden.

De modo que probaremos que si tenemos una función monótona $f : X \to Y$, entonces $f^{-1}(S)$ es un conjunto superior para todo S conjunto superior.

Sea $x \in f^{-1}(S)$, $y \in X$ tales que $x \leq y$ entonces como f es monótona tenemos que $f(x) \leq f(y)$, además $f(x) \in S$ (porque $x \in f^{-1}(S)$) y $f(y) \in X$; como S es un conjunto superior tenemos que $f(y) \in S$, con lo cual $y \in f^{-1}(S)$.

Parte 4 (Morfismo de Anillos):

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de anillos. Probemos que $f^{-1}(S)$ es subanillo para todo S subanillo:

Tenemos que probar que $f^{-1}(S)$ es un subgrupo y además que dados $x, y \in f^{-1}(S)$ se tiene que $x.y \in f^{-1}(S)$.

Lo de ser subgrupo se obtiene de forma automática usando la parte 2, ya que los morfismos de anillos son morfismos de grupos y verifican que la preimagen de todo subgrupo es subgrupo, y el subanillo S es en particular un subgrupo.

Sean $x, y \in f^{-1}(S)$, entonces $f(x), f(y) \in S$ entonces como S es subanillo $f(x).f(y) = f(x.y) \in S$; de modo que $x.y \in f^{-1}(S)$.

Parte 5 (Morfismo de Módulos)

Sea $f : X \to Y$ un morfismo de A-módulos. Probemos que $f^{-1}(S)$ es A-submódulo para todo S A-submódulo:

Tenemos que probar que $f^{-1}(S)$ es un subgrupo y además que dados $x \in f^{-1}(S)$ y $a \in A$ se tiene que $ax \in f^{-1}(S)$:

Lo de subgrupo ocurre lo mismo que con los anillos ya que las morfismos de módulos son también morfismos de grupos.

Sea ahora $x \in f^{-1}(S)$ y $a \in A$, tenemos que $f(x) \in S$ y $a \in A$, con S un A-submódulo entonces $a.f(x) = f(a.x) \in S$, luego $a.x \in f^{-1}(S)$. □

Observación 6.1. Observe que el conjunto imagen de una función deductiva no necesariamente es un subespacio deductivo.

Tomemos como ejemplo el espacio deductivo inducido sobre $\mathbb{R}$ como cuerpo. Aquí los subespacios son los triviales: $\{0\}$ y $\mathbb{R}$. Tomemos la siguiente función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Es una función deductiva, ya que la preimagen de todo subespacio es subespacio i.e. $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ y $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Sin embargo la imagen no es subespacio deductivo: $Im(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que no es subespacio.

6.2. Ergomorfismos

Ahora nos interesa definir cuando dos espacios son *«equivalentes deductivamente»*, utilizamos el prefijo *ergo* que proviene del latín y significa «luego», «por lo tanto» o «entonces», es un guiño a la motivación original de la teoría deductiva que es la abstracción de la noción de implicación:

DEFINICIÓN 6.2 (Ergomorfismo). Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos.

Diremos que una función $\xi : \alpha \to \beta$ es un *ergomorfismo* sii ξ es una función deductiva, biyectiva y con inversa deductiva.

Nuestra notación será: $(\alpha, \delta) \equiv (\beta, \gamma)$.

PROPOSICIÓN 6.2 (Segunda Proposición de Intensidad). *El concepto de ergomorfismo es generalización de las siguientes definiciones: homeomorfismo (a través de τ), isomorfismo de grupos (a través de ρ), isomorfismo de preordenes (a través de ε), isomorfismo de anillos (a través de θ) e isomorfismo de módulos (a través de κ).*

DEMOSTRACIÓN. Para esta prueba basta valerse de la primera proposición de intensidad:

En el primero tenemos que el concepto de función deductiva es una generalización de función continua, luego tendremos fácilmente que un homeomorfismo es de hecho un ergomorfismo entre los deductivos inducidos por los espacios topológicos en cuestión. Y por tanto una generalización del concepto. El argumento se extiende a los demás casos. $\square$

PROPOSICIÓN 6.3 (Primer Caracterización de Espacios Ergomorfos).

Sean (α, δ),(β, γ) *espacios deductivos.*

$(\alpha, \delta) \equiv (\beta, \gamma)$ *sii* $\exists \varphi : \Omega(\alpha, \delta) \to \Omega(\beta, \gamma)$ *biyectiva tal que:*

1. $\varphi(S) \simeq S \ \forall S \in \Omega(\alpha, \delta)$
2. $\varphi(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \varphi(S_\lambda) \ \forall \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \Omega(\alpha, \delta)$

DEMOSTRACIÓN. $(\Rightarrow)$ Sea $\epsilon : \alpha \to \beta$ un ergomorfismo.

Entonces definimos: $\varphi(S) := \epsilon(S)$ (su imagen) $\forall S \in \Omega(\alpha, \delta)$

φ es biyectiva.

(1) y (2) son obvios porque ϵ es biyectiva.

$(\Leftarrow)$ $\forall S \in \Omega(\alpha, \delta)$ Sea $\varphi_S : S \to \varphi(S)$ biyectiva.

Definimos $\epsilon : \alpha \to \beta$ como sigue:

$\epsilon(x) := \varphi_{\delta_{[\alpha]}(\{x\})}(x)$

ϵ es inyectiva:

Sea $a, b \in \alpha$; $a \neq b$;

Asumamos que $\epsilon(a) = \epsilon(b)$;

$a \in \delta_{[\alpha]}(\{a\})$; $b \in \delta_{[\alpha]}(\{b\})$

Entonces $\epsilon(a) \in \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\})); \epsilon(b) \in \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{b\}))$

$\Rightarrow \epsilon(a) = \epsilon(b) \in \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\})) \cap \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{b\})) = \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\}) \cap \delta_{[\alpha]}(\{b\})) \overset{(*)}{\Rightarrow} a, b \in \delta_{[\alpha]}(\{a\}) \cap \delta_{[\alpha]}(\{b\})$

$\Rightarrow a \in \delta_{[\alpha]}(\{b\}), b \in \delta_{[\alpha]}(\{a\})$

Y entonces, $\delta_{[\alpha]}(\{a\}) = \delta_{[\alpha]}(\{b\})$ luego $a = b$

porque $\varphi_{\delta_{[\alpha]}(\{a\})} = \varphi_{\delta_{[\alpha]}(\{b\})}$ es biyectiva

y $\varphi_{\delta_{[\alpha]}(\{a\})}(a) = \epsilon(a) = \epsilon(b) = \varphi_{\delta_{[\alpha]}(\{b\})}(b)$. Absurdo.

ϵ es sobreyectiva:

Sea $y \in \beta$;

$\Rightarrow \gamma_{[\beta]}(\{y\}) \in \Omega(\beta, \gamma)$

Sea $S \in \Omega(\alpha, \delta) / \varphi(S) = \gamma_{[\beta]}(\{y\})$

Sea $x \in \alpha / \varphi_S(x) = y$

$\Rightarrow y = \epsilon(x)$.

Trivialmente ϵ,ϵ^{-1} son funciones deductivas.

Probemos (*):

Sea $S \in \Omega(\alpha, \delta)$; $a \in \alpha$ tal que $\epsilon(a) \in \varphi(S)$;

$\varphi(S) \in \Omega(\beta, \gamma)$ y entonces, $\gamma_{[\beta]}(\{\epsilon(a)\}) \subseteq \varphi(S)$

$\Rightarrow \gamma_{[\beta]}(\{\epsilon(a)\}) \cap \varphi(S) = \gamma_{[\beta]}(\{\epsilon(a)\})$ pero por definición

$\gamma_{[\beta]}(\{\epsilon(a)\}) = \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\}))$

Y luego, $\varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\})) \cap \varphi(S) = \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\}))$

$\Rightarrow \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\}) \cap S) = \varphi(\delta_{[\alpha]}(\{a\})) \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(\{a\}) \cap S = \delta_{[\alpha]}(\{a\})$ porque φ es biyectiva.

$\Rightarrow \{a\} \subseteq \delta_{[\alpha]}(\{a\}) \subseteq S \Rightarrow a \in S$ □

Proposición 6.4 (Segunda Caracterización de Espacios Ergomorfos).

Sean (α, δ),(β, γ) *espacios deductivos.*

$(\alpha, \delta) \equiv (\beta, \gamma)$ *sii existen* $\varphi : \alpha \to \beta$ $\psi : \beta \to \alpha$ *traductores tales que* $\varphi \circ \psi = id_\beta$ *y* $\psi \circ \varphi = id_\alpha$*.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Esto es trivial. Digamos que $\varepsilon : \alpha \to \beta$ es un ergomorfismo. Bastará tomar su inversa ε^{-1} que es también ergomorfismo y por tanto ambos son traductores inversos entre sí.

($\Leftarrow$) Tenemos que φ y ψ son inyectivas y una inversa de la otra, esto implica que estamos hablando de una biyección φ donde $\psi = \varphi^{-1}$. Bastará ver que ambas son funciones deductivas. Pero por la simetría de la prueba bastará a su vez ver que alguna de las dos es deductiva. Veamos que φ es deductiva:

Sea pues $S \in \Omega(\beta, \gamma)$, veamos que $\varphi^{-1}(S) \in \Omega(\alpha, \delta)$ pero esto es lo mismo que probar que $\psi(S) \in \Omega(\alpha, \delta)$, para ello tenemos que $\delta_{[\alpha]}(\psi(S)) = \psi(\gamma_{[\beta]}(S)) = \psi(S)$, la primer igualdad porque ψ es un traductor, la segunda porque $S \in \Omega(\beta, \gamma)$. □

Se nos plantea sin embargo entre teorías la siguiente cuestión, modificamos la previa caracterización un poco y preguntamos si bastará algo más débil:

PROBLEMA. *Supongamos que tenemos dos espacios deductivos de modo que tengo dos traducciones mutuas: ¿Son estos espacios ergomorfos?*

6.3. Eidos (Invariantes Deductivos)

En todas las teorías suelen existir varias formas de invariantes que dependen siempre de alguna relación entre estructuras de modo que se preserven todas las propiedades que corresponden. Generalmente se trata de propiedades que se mantienen inalteradas tras la aplicación de una función especial. Usualmente llamada isomorfismo, aunque según la teoría en la que estemos los nombres varían. Vamos a realizar una definición análoga:

DEFINICIÓN 6.3 (Eidos (Invariante Deductivo)). Diremos que una propiedad es un *eidos* sii es preservado mediante ergomorfismos.

(usamos la palabra griega «eidos» que significa lo inmutable según Platón, el mundo de las ideas)

PROPOSICIÓN 6.5 (Tercer Proposición de Intensidad). *El concepto de eidos es generalización de las siguientes definiciones: invariante topológico (a través de τ), invariante de grupos (a través de ρ), invariante de preordenes (a través de ε), invariante de anillos (a través de θ) e invariante de módulos (a través de κ).*

DEMOSTRACIÓN. Si el concepto de eidos le aplicamos la traducción τ obtenemos el siguiente concepto: «aquella familia de conceptos que es preservado mediante homeomorfismos» esta es la definición de invariante topológico. El argumento se extiende a los demás casos cambiando «homeomorfismo» por los diferentes isomorfismos en cada teoría. □

6.4. Deductivo Inicial y Deductivo Producto

DEFINICIÓN 6.4 (Deductivo Inicial). Sea α un conjunto y sean $\{(\beta_\lambda, \gamma_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios deductivos y una familia de funciones $d_\lambda : \alpha \to \beta_\lambda$con $\lambda \in \Lambda$. El *deductivo inicial* es el espacio deductivo cuya base es: $\mathcal{I} = \{d_\lambda^{-1}(S) : S \in \Omega(\beta_\lambda, \gamma_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$, es fácil observar que dicha familia no verifica el segundo teorema de caracterización, sin embargo tiene al conjunto ambiente que es necesario para que sea una base i.e. $\alpha \in \mathcal{I}$.

Introducimos esta definición de deductivo inicial para considerar el deductivo inducido por la estructura de producto cartesiano:

DEFINICIÓN 6.5 (Deductivo Producto). Sea $\{(\alpha_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios deductivos.

El producto cartesiano es: $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda = \{f : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda : f(\lambda) \in \alpha_\lambda\}$

Para todo $\lambda \in \Lambda$ la proyección $p_\lambda : \prod\limits_{\lambda\in\lambda} \alpha_\lambda \to \alpha_\lambda$ es la función definida mediante $p_\lambda(f) = f(\lambda)$.

El *deductivo producto* es el deductivo inicial respecto de las proyecciones y nuestra notación será: $(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda, \mathop{\Delta}\limits_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda)$.

PROPOSICIÓN 6.6 (Cuarta Proposición de Intensidad). *El concepto de deductivo producto es una generalización de las siguientes definiciones: topología producto (a través de τ), grupo producto (a través de ρ), preorden producto (a través de ε), anillo producto (a través de θ) y módulo producto (a través de κ).*

DEMOSTRACIÓN. A cargo del lector.

Ayuda: Observe que lo que hay que demostrar para el caso del traductor τ es que si consideramos el espacio deductivo inducido por la topología producto es el mismo que el deductivo producto de los espacios deductivos inducidos por cada topología. Análogamente para el traductor ρ hay que mostrar que si consideramos el espacio deductivo inducido por el grupo producto (suma directa) es el mismo que el deductivo producto de los espacios deductivos inducidos por cada grupo. Y así para cada traductor. $\square$

6.5. Deductivo Final y Deductivo Cociente

DEFINICIÓN 6.6 (Deductivo Final). Sea $\{(\alpha_\lambda, \delta_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios deductivos,β un conjunto y sean $f_\lambda : \alpha_\lambda \to \beta$ funciones.

Diremos que el *deductivo final* sobre β es el que tiene por deductor a la siguiente familia: $\mathcal{F} := \{S \subseteq \beta\ :\ f_\lambda^{-1}(S) \in \Omega(\alpha_\lambda, \delta_\lambda)\, \forall \lambda \in \Lambda\}$.

Queda a cargo del lector el verificar que esta es una buena definición i.e. la familia anterior verifica el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos.

DEFINICIÓN 6.7 (Deductivo Cociente). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Y sea también $\sim$ una relación de equivalencia sobre α.

Decimos que el *deductivo cociente* sobre ${}^{\alpha}/_{\sim}$ es el deductivo final respecto de la proyección canónica al cociente: $\pi_\sim : \alpha \to {}^{\alpha}/_{\sim}$.

$\pi_\sim(x) := [x]_\sim$ donde $[x]_\sim$ es la clase del elemento x.

Nuestra notación será: ${}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim}$ para el deductivo cociente.

Proposición 6.7 (Quinta Proposición de Intensidad). *El concepto de deductivo cociente es una generalización de las siguientes definiciones: topología cociente (a través de τ), grupo cociente (a través de ρ), preorden cociente (a través de ε), anillo cociente (a través de θ) y módulo cociente (a través de κ)*

Demostración. A cargo del lector.

Ayuda: Similarmente al caso del deductivo producto. Lo que hay que mostrar por ejemplo en el caso del traductor τ es que si consideramos el espacio deductivo inducido por la topología cociente es el mismo que el deductivo cociente del espacio deductivo inducido por la topología. Para el caso de los grupos es análogo, con la salvedad de que para que una relación de equivalencia induzca un grupo debe ser una congruencia. □

Ejercicios

Ejercicio 6.1. Complete las pruebas del hecho de que los siguientes conceptos son generalizaciones intensas sobre teoría deductiva: Deductivo Producto y Deductivo Cociente. ($\star\star\star\star$)

Ejercicio 6.2. Pruebe que conmutan los diagramas en forma de cuadrado formados por las teorías ded, top, pre, dgf y sus traductores. ($\star\star\star$)

Ejercicio 6.3. Encuentre una generalización sobre teoría deductiva del concepto de grafo completo. (Ayuda: considere equivalencias de la noción de grafo completo.) ($\star\star$)

Ejercicio 6.4. Generalice (sobre la teoría deductiva) los conceptos de primalidad y de coprimalidad de los números enteros. ($\star\star\star$)

Ejercicio 6.5. Analice la estructura de una espacio deductivo que sea compatible con ρ y con τ. ($\star\star\star$)

Ejercicio 6.6. Pruebe que si dos familias de espacios deductivos, $\{(\alpha_\lambda,\delta_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}, \{(\beta_\lambda,\gamma_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ cumplen que $(\alpha_\lambda,\delta_\lambda)\equiv(\beta_\lambda,\gamma_\lambda)\ \forall\lambda\in\Lambda$ entonces sus deductivos producto también son ergomorfos. ($\star\star$)

Ejercicio 6.7. Considere un espacio deductivo (α,δ) compatible con ρ (es decir, inducido por las subgrupos de algún grupo) y considere una relación de equivalencia $\sim$ sobre α. ¿${}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim}$ es compatible con ρ? Realice lo mismo pero con los traductores τ y ε. ($\star\star\star\star$)

Ejercicio 6.8. Considere dos espacios deductivos compatibles con ρ. ¿Su producto es compatible con ρ? Generalice si corresponde.

Considere la misma cuestión pero con los traductores τ y ε. ($\star\star\star\star\star$)

Ejercicio 6.9. Vea en que casos la vuelta del ejercicio anterior es cierta. (si el producto es compatible con $\tau/\varepsilon/\rho$ entonces cada proyección lo es). ($\star\star\star\star$)

Ejercicio 6.10. Suponga que sobre un espacio deductivo (α, δ) se consideran dos relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre α tales que ${}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim_1} \equiv {}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim_2}$. ¿Qué puede decirse de $\sim_1$ y $\sim_2$? Dé una condición suficiente sobre las relaciones para que los espacios cociente sean ergomorfos. ($\star\star\star$)

Capítulo 7

Teoría Topológica

```
"Hacer la pregunta correcta
es más difícil que responderla."
-Georg Cantor
```

7.1. El Ejemplo $hau - top$

Antes de empezar propiamente con el capítulo daremos un ejemplo en el que la respuesta a la pregunta del capítulo previo resulta afirmativa.

El caso más clásico de esto son las diferentes formas de axiomatizar la teoría topológica. Explicitaremos una de ellas aquí como sigue:

Esta definición de topología es debida a Hausdorff, y la teoría a la que refiere quedará codificada mediante hau a modo de establecer las mutuas traducciones con top.

DEFINICIÓN 7.1 (Espacio Hausdorff). Diremos que un espacio *Hausdorff* (a no confundir con espacio topológico de Hausdorff) es un par $(X, \mathcal{N})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ es una aplicación que verifica las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in X \ \forall N \in \mathcal{N}(x)$, $x \in N$. (cada punto pertenece a cualquiera de sus entornos)
2. $\forall x \in X \ \forall N_1, N_2 \in \mathcal{N}(x) \ N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}(x)$ (la intersección de dos entornos de un punto es un entorno del punto)
3. $\forall x \in X \ \forall N \in \mathcal{N}(x)$, si $N \subseteq M$ entonces $M \in \mathcal{N}(x)$ (todo conjunto que contenga a un entorno de un punto es también un entorno del mismo punto)
4. $\forall x \in X \ \forall N \in \mathcal{N}(x) \ \exists M \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\forall y \in M \ N \in \mathcal{N}(y)$ (dado cualquier entorno, siempre puedo encontrar otro entorno del mismo punto, de modo que el anterior sea entorno de todos sus puntos)

Esta definición es simplemente espectacular, y más aún cuando veamos las traducciones que consisten a su vez en ergomorfismos entre estas teorías, lo que hace de algún modo obsoleta la definición presente ya que la otra induce la misma estructura teórica. Es fascinante la cantidad de estructuras teóricas que se pueden crear para moldear la misma idea. La teoría deductiva nos permite establecer con claridad el criterio bajo el cual dos teorías son equivalentes. Esto es, cuando tenemos la presencia de un ergomorfismo.

Comencemos por la traducción $\zeta : hau \to top$ que es conocida y bastante natural. Si tenemos una topología cualquiera (X, τ), el sistema de entornos de cada punto $x \in X$ induce una función como la que solicita la definición de espacio Hausdorff y que además verifica las propiedades correspondientes. Queda a cargo del lector la prueba de esto.

Como es de esperar, la traducción en cuestión es:

$\zeta : [A \in \mathcal{N}(x)] \mapsto [A \in \mathcal{N}_x]$

Por otro lado la traducción $\varpi : top \to hau$ es de una hermosura brillante: Supongamos que tenemos un espacio Hausdorff tal como se acaba de definir $(X, \mathcal{N})$.

Definimos una topología τ sobre X como sigue:

$\tau := \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A, A \in \mathcal{N}(x)\}$

Veremos que esto de hecho es una topología.

Veamos que τ es una topología en X:

1) El vacío está en la topología de forma trivial. Y $X \in \tau$ por la propiedad 3 de la definición de espacio Hausdorff. (y además todo punto tiene un entorno)

2) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau$, sea $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, tenemos que $x \in A_{\lambda_0}$ para algún $\lambda_0 \in \Lambda$, por lo tanto como $A_{\lambda_0} \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es entorno de x.

3) Sean $A, B \in \tau$ veamos que $A \cap B \in \tau$: Sea $x \in A \cap B$, y sabemos que A es entorno de x y que B es entorno de x, por la propiedad 2 sabemos que esto implica que $A \cap B$ es entorno de x. De modo que $\forall x \in A \cap B$ $A \cap B$ es entorno de x.

Esto muestra que es una topología.

La traducción por supuesto es:

$\varpi : [A \in \tau] \mapsto [A \in \mathcal{N}(x), \forall x \in A]$

Claramente son inversas:

$\varpi \circ \zeta = id$:$[A \in \mathcal{N}(x)] \overset{\zeta}{\mapsto} [A \in \mathcal{N}_x] \overset{\varpi}{\mapsto} [\exists H : x \in H \subseteq A\, tal\, que\, H \in \mathcal{N}(x), \forall x \in H] \simeq [A \in \mathcal{N}(x)]$

$\zeta \circ \varpi = id$: $[A \in \tau] \overset{\varpi}{\mapsto} [A \in \mathcal{N}(x), \forall x \in A] \overset{\zeta}{\mapsto} [A \in \mathcal{N}_x, \forall x \in A] \simeq [A \in \tau]$

Usando la segunda caracterización de espacios ergomorfos obtenemos que estas teorías en realidad son equivalentes.

Ya volveremos sobre la importante cuestión planteada sobre traducciones mutuas entre espacios deductivos, pero por ahora desarrollaremos las consecuencias de la existencia del traductor canónico $\tau : ded \to top$.

7.2. Introducción

Como dijimos anteriormente tenemos que dado un espacio topológico, la familia de cerrados de la topología verifica el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos. Este hecho marca una relación estrecha entre los espacios deductivos y los espacios topológicos, esto pues los cerrados de una topología la caracterizan unívocamente, y como se vio también, la clausura topológica es una función clausura. El traductor entre estas dos teorías es el siguiente y será considerado canónico:

$\tau : [A \in \Omega] \to [A^c \in \tau]$

Traduciremos sobre la teoría topológica que un conjunto *es subespacio deductivo* diciendo que *su complemento está en la topología* (i.e. es cerrado en la topología).

Las siguientes son muchas definiciones con origen en la topología que tienen un significado específico en teoría deductiva.

DEFINICIÓN 7.2 (Generalizaciones vía τ). Sea (α, δ) espacio deductivo. Sean $A \subseteq \alpha, W \subseteq \alpha, x \in \alpha$, $B \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$.

Diremos que A es *τ-abierto* sii: $A^c \in \Omega(\alpha, \delta)$. Y notaremos por $\nabla(\alpha, \delta)$ a la familia de τ-abiertos en (α, δ).

Diremos que A es *τ-cerrado* sii: $A \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Diremos que W es un *τ-entorno* de x sii: $\exists A \subseteq \alpha$, τ-abierto, tal que $x \in A \subseteq W$. Y notaremos por $\mathcal{N}_x^\tau$ al conjunto de τ-entornos de x.

Diremos que $\mathcal{T}_d$ es una *τ-red* sii: $\mathcal{T}_d : \mathcal{D} \to \alpha$, $\mathcal{D}$ es un conjunto dirigido.

Diremos que una τ-red $\mathcal{T}_d$ *converge a x* sii: $\forall W \subseteq \alpha$ τ-entorno; $\exists d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\forall d \geq d_0$, $\mathcal{T}_d \in W$. Notaremos: $\mathcal{T}_d \to x$.

Diremos que B es una *τ-base* sii: $\forall A \subseteq \alpha$ τ-abierto $\exists \{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B$ tal que $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$.

Diremos que A es *τ-conexo* sii: $\nexists A, B$ τ-abiertos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \alpha$.

Diremos que W es *τ-compacto* sii: $\forall \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de τ-abiertos tal que $W \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $\exists F \subseteq \Lambda$ finito, tal que $W \subseteq \bigcup\limits_{f \in F} A_f$.

Diremos que (α, δ) es $\tau - T_0$ o τ-*Kolmogórov* sii: $\forall x, y \in \alpha$, $\exists S \in \Omega(\alpha, \delta)$ tal que $x \in S$ y $y \notin S$. (observe que la definición original dentro de la topología no varía si se usan cerrados en vez de abiertos)

Diremos que (α, δ) es $\tau - T_1$ o τ-*Fréchet* sii: $\forall x, y \in \alpha$, $\exists S, T \in \Omega(\alpha, \delta)$ tal que $x \in S$, $x \notin T$ y además $y \in T$, $y \notin S$. (idem.)

Diremos que (α, δ) es $\tau - T_2$ o τ-*Hausdorff* sii: $\forall x, y \in \alpha$, $\exists S, T \in \Omega(\alpha, \delta)$ tal que $x \in S$, $y \in T$ y además $S \cup T = \alpha$. (observe que aquí es menester cambiar un poco la generalización para permitir que sea equivalente a la traducción)

OBSERVACIÓN 7.1. Lo más notable de esta generalización es que nos permite muchas posibilidades de profundizar e investigar conceptos topológicos en lugares y contextos más amplios. Y generalizar afirmaciones y resultados que provienen de esa fuente. En la próxima parte del texto nos centraremos en sacarle el jugo a estas definiciones, que motivan muchas preguntas interesantes.

7.3. Primeros Resultados

Vamos a probar algunos resultados que se desprenden fácilmente de consideraciones y proposiciones topológicas.

PROPOSICIÓN 7.1. *Sea* (α, δ) *espacio deductivo. Sea* $x \in \alpha$ *y* $A \subseteq \alpha$.

1. $x \in \delta_{[\alpha]}(A)$ *sii* $\begin{cases} \mathcal{N}_x^\tau = \emptyset & si\ A = \emptyset \\ \forall W \in \mathcal{N}_x^\tau; W \cap A \neq \emptyset & si\ A \neq \emptyset \end{cases}$
2. $\emptyset$ *es* τ*-abierto. La unión arbitraria de* τ*-abiertos es* τ*-abierto.*
3. A *es* τ*-abierto sii* $\forall x \in A$; $A \in \mathcal{N}_x^\tau$.
4. $\forall B \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$; B *es* τ*-base de algún espacio deductivo en* α.

DEMOSTRACIÓN.

1) Si $A = \emptyset$:

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{N}_x^\tau \neq \emptyset$, entonces existe J τ-abierto tal que $x \in J$

entonces $J^c \in \Omega(\alpha, \delta)$, luego $x \notin \delta_{[\alpha]}(J^c) = J^c$.

Lo cual es absurdo pues $x \in \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$ (i.e. está en el centro).

($\Leftarrow$) Asumamos que $x \notin \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$, entonces existe $y \in \alpha$

tal que $(\{y\}, \{x\}) \notin \delta$ y luego $x \notin \delta_{[\alpha]}(\{y\})$;

entonces $(\delta_{[\alpha]}(\{y\}))^c$ es un τ-abierto y $x \in (\delta_{[\alpha]}(\{y\}))^c$;

entonces $(\delta_{[\alpha]}(\{y\}))^c \in \mathcal{N}_x^\tau = \emptyset$ Absurdo.

Si $A \neq \emptyset$:

($\Rightarrow$) Sea $W \subseteq \alpha$ a τ-entorno de x .

Entonces $\exists J \subseteq \alpha$ τ-abierto tal que $x \in J \subseteq W$

$\Rightarrow J^c \in \Omega(\alpha,\delta)$
Entonces; $J^c \cap \delta_{[\alpha]}(A) \in \Omega(\alpha,\delta)$ (*) por proposición previa.
Asumamos que $W \cap A = \emptyset$:
y entonces; $J \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow A \subseteq J^c \cap \delta_{[\alpha]}(A) \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(A) \subseteq J^c \cap \delta_{[\alpha]}(A)$ por *.
$\Rightarrow x \in \delta_{[\alpha]}(A) \subseteq J^c \cap \delta_{[\alpha]}(A) \Rightarrow x \in J^c$Absurdo.
($\Leftarrow$) Asumamos que $x \notin \delta_{[\alpha]}(A)$:
$\Rightarrow x \in (\delta_{[\alpha]}(A))^c \tau$-abierto, entonces $(\delta_{[\alpha]}(A))^c \in \mathcal{N}_x^\tau$
pero $(\delta_{[\alpha]}(A))^c \cap A = \emptyset$ porque $A \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$. Absurdo.
2) Lo primero es obvio porque $\emptyset^c = \alpha \in \Omega(\alpha,\delta)$.
Para lo segundo, sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia de conjuntos τ-abiertos
$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ is τ-abierto sii $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \in \Omega(\alpha,\delta)$
sii $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \in \Omega(\alpha,\delta)$ sii $A_\lambda^c \in \Omega(\alpha,\delta)$ $\forall\lambda\in\Lambda$ sii A_λ is τ-abierto $\forall\lambda\in\Lambda$
3) Si A es vacío queda probado por 2, sino:
($\Rightarrow$)
Sea $x \in A$;
Entonces $x \in A \subseteq A$ y A is τ-abierto, luego A es un τ-entorno de x .
($\Leftarrow$) Sea $x \in A$;
Sea J_x a τ-abierto tal que $x \in J_x \subseteq A$; podemos hacer esto por hipótesis.
Veamos que $\bigcup\limits_{x\in A} J_x = A$:
($\supseteq$) Es obvio por construcción.
($\subseteq$) $J_x \subseteq A$ $\forall x \in A$ entonces cualquier unión de conjuntos estará en A .
Entonces por 2, A es τ-abierto porque es unión de τ-abiertos.
4) Definimos $\beta := \{(\bigcup\limits_{k\in K} J_k)^c : \{J_k\}_{k\in K} \subseteq B\}$
Usaremos ahora el segundo teorema de caracterización:
(1) $\alpha \in \beta$:
$\emptyset$ es la unión vacía de elementos de$B$; por lo tanto $\alpha = \emptyset^c \in \beta$.
(2) Es obvio por las propiedades de De Morgan.
Luego, $\rho := [\beta]_\alpha$ es un deductor α .
Probemos que B es una τ-base de (α,ρ) :
Sea $A \subseteq \alpha$ un τ-abierto; entonces $A^c \in \Omega(\alpha,\rho)$
y luego, $A^c \in \beta$; por lo tanto $\exists\{J_k\}_{k\in K} \subseteq B$ tal que $A = \bigcup\limits_{k\in K} J_k$.

□

OBSERVACIÓN 7.2. Observar que la primera propiedad nos dice que si un conjunto es no vacío en un espacio deductivo, entonces un punto de la clausura de dicho conjunto es todo aquel tal que si tomo cualquier τ-entorno, este siempre toca al conjunto original. Esta es una propiedad bastante fuerte y se usará mucho para probar las siguientes propiedades de los ergomorfismos. Por otro lado, esa misma propiedad también nos está diciendo que un punto pertenece al centro del espacio deductivo sí y sólo si no tiene ningún τ-entorno. La propiedad 2 es una forma dual de las propiedades de los subespacios deductivos. Las propiedades 3 y 4 son generalizaciones de propiedades importantes en topología.

PROPOSICIÓN 7.2 (Propiedades de Ergomorfismos). *Sean* (α,δ),(β,γ) *espacios deductivos con* $x \in \alpha$

Sea $\xi : \alpha \to \beta$ *un ergomorfismo entre ellos; entonces:*

1. $S \in \Omega(\alpha,\delta) \Leftrightarrow \xi(S) \in \Omega(\beta,\gamma)\ \forall S \subseteq \alpha$ (los subespacios son preservados por los ergomorfismos)
2. $U \in \mathcal{N}_x^\tau \Leftrightarrow \xi(U) \in \mathcal{N}_{\xi(x)}^\tau\ \forall U \subseteq \alpha$ (los τ-entornos son preservados por los ergomorfismos)
3. $\xi \circ \delta_{[\alpha]}(A) = \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A)\ \forall A \subseteq \alpha$ (los ergomorfismos conmutan con las clausuras)
4. ξ es un traductor.
5. $(A,B) \in \delta \Leftrightarrow (\xi(A),\xi(B)) \in \gamma\ \forall A,B \subseteq \alpha$ (los ergomorfismos respetan los deductores)
6. Si (β,γ) es un subespacio relativo de otro espacio deductivo (ϱ,ς) entonces $\xi : \alpha \to \varrho$ es un traductor. (si hay un ergomorfismo entre un espacio deductivo y un subespacio de otro espacio, entonces dicho ergomorfismo es un traductor entre los espacios)

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $S \subseteq \alpha$;

$(\Rightarrow)$

$S \in \Omega(\alpha,\delta) \Rightarrow (\xi^{-1})^{-1}(S) \in \Omega(\beta,\gamma)$ porque ξ^{-1} es una función deductiva.

$\Rightarrow \xi(S) \in \Omega(\beta,\gamma)$ porque ξ es biyectiva.

$(\Leftarrow)$

$\xi(S) \in \Omega(\beta,\gamma) \Rightarrow \xi^{-1}(\xi(S)) \in \Omega(\alpha,\delta)$ porque ξ es una función deductiva.

$\Rightarrow S \in \Omega(\alpha,\delta)$ porque ξ es biyectiva.

2) Sea $U \subseteq \alpha$;

$(\Rightarrow)$ $U \in \mathcal{N}_x^\tau \Rightarrow \exists J$ τ-abierto tal que $x \in J \subseteq U$

$\Rightarrow J^c \in \Omega(\alpha,\delta)$ entonces, $\xi(J^c) \in \Omega(\beta,\gamma)$ por proposición previa.

$\Rightarrow \xi(J^c)^c$ es τ-abierto $\Rightarrow \xi(J)$ is τ-abierto

y $\xi(x) \in \xi(J) \subseteq \xi(U)$ por lo tanto, $\xi(U) \in \mathcal{N}^{\tau}_{\xi(x)}$

($\Leftarrow$) $\xi(U) \in \mathcal{N}^{\tau}_{\xi(x)} \Rightarrow \exists \xi(K) \subseteq \beta$ τ-abierto tal que $\xi(x) \in \xi(K) \subseteq \xi(U)$

entonces $(\xi(K))^c \in \Omega(\beta,\gamma) \Rightarrow \xi^{-1}(\xi(K))^c = \xi^{-1}(\xi(K^c)) = K^c \in \Omega(\alpha,\delta)$

y entonces, $x \in K \subseteq U$ y K es τ-abierto, por lo tanto, $U \in \mathcal{N}^{\tau}_{x}$.

3) Sea $A \subseteq \alpha$;

Caso 1: $A \neq \emptyset$.

Tenemos que ver que $\xi \circ \delta_{[\alpha]}(A) = \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A)$

($\subseteq$) Sea $x \in \xi \circ \delta_{[\alpha]}(A)$. Asumamos que $x \notin \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A)$ entonces $\exists U \in \mathcal{N}^{\tau}_{x}$ tal que $U \cap \xi(A) = \emptyset$

entonces $\xi(\xi^{-1}(U)) \cap \xi(A) = \xi(\xi^{-1}(U) \cap A) = \emptyset$ y entonces, $\xi^{-1}(U) \cap A = \emptyset$

Pero $\xi^{-1}(U) \in \mathcal{N}^{\tau}_{\xi^{-1}(x)}$, por (2) y porque ξ^{-1} es ergomorfismo.

y $\xi^{-1}(x) \in \delta_{[\alpha]}(A)$ entonces $\forall W \in \mathcal{N}^{\tau}_{\xi^{-1}(x)}$ $W \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $\xi^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$ Absurdo.

($\supseteq$) Sea $x \in \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A)$. Asumamos que $x \notin \xi \circ \delta_{[\alpha]}(A)$, y entonces, $\xi^{-1}(x) \notin \delta_{[\alpha]}(A)$

Luego $\exists U \in \mathcal{N}^{\tau}_{\xi^{-1}(x)}$ tal que $U \cap A = \emptyset$.

Pero $\xi(U) \in \mathcal{N}^{\tau}_{x}$ por (2) porque ξ es un ergomorfismo.

y $\xi(U) \cap \xi(A) = \xi(U \cap A) = \xi(\emptyset) = \emptyset$, y $x \in \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A)$ Absurdo.

Caso 2: $A = \emptyset$.

Tenemos que probar que $\xi \circ \delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \gamma_{[\beta]} \circ \xi(\emptyset)$, esto sii $\xi \circ \delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \gamma_{[\beta]}(\emptyset)$ (*)

Si $\delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \emptyset$ (es decir, si el vacío es subespacio) entonces $\xi \circ \delta_{[\alpha]}(\emptyset) = \xi(\emptyset) = \emptyset$ es un subespacio también, y por lo tanto es puro, es decir, $\gamma_{[\beta]}(\emptyset) = \emptyset = \xi \circ \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$

Si $\gamma_{[\beta]}(\emptyset) = \emptyset$ hacemos lo mismo pero aplicando el ergomorfismo ξ^{-1} en ambos miembros.

Si no sucede esto veamos (*):

$x \in \gamma_{[\beta]}(\emptyset)$ sii $\mathcal{N}^{\tau}_{x} = \emptyset$ esto es equivalente a que $\mathcal{N}^{\tau}_{\xi^{-1}(x)} = \emptyset$ si y sólo si $\xi^{-1}(x) \in \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$ sii $x \in \xi \circ \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$.

4) Automático ya que verifica (3) y además es inyectiva.

5) Sea $A, B \subseteq \alpha$; $A \neq \emptyset$

$$(A,B) \in \delta \Leftrightarrow B \subseteq \delta_{[\alpha]}(A) \overset{\xi \text{ es biyectiva}}{\Leftrightarrow} \xi(B) \subseteq \xi \circ \delta_{[\alpha]}(A)$$

$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \xi(B) \subseteq \gamma_{[\beta]} \circ \xi(A) \Leftrightarrow (\xi(A), \xi(B)) \in \gamma$$

6) Basta observar que es inyectiva por ser un ergomorfismo (aún cuando ahora cambió el codominio) y por ser ergomorfismo conmuta con las clausuras. □

7.4. τ-Teorema

En este capítulo, y con motivo de enlazar las teorías topológica y deductiva, vamos a arrojar algo de luz a la relación entre ambas, de modo que el τ-Teorema resulte bastante natural a ojos del lector. Dado que los cerrados de una topología inducen un espacio deductivo, y que esta es la relación que permite la traducción, nos interesa saber que cosas debemos pedirle a los subespacios deductivos, pensando como que son una especie de «cerrados», de modo que los «abiertos» inducidos por ellos tengas estructura de una topología. Las leyes de De Morgan nos dicen claramente que dichos «cerrados» deberán cumplir las propiedades duales que verifican los «abiertos», es decir, 1) El conjunto ambiente y el vacío deberán ser cerrados. 2) La intersección arbitraria de cerrados es cerrado. 3) La unión finita de cerrados es cerrado. Todas estas condiciones sobre los cerrados, son equivalentes a las condiciones que sobre los abiertos inducen una topología. Es decir, si tengo una familia tal, y tomo los complementos de dicha familia, obtengo una topología. ¿Cuáles de las condiciones las tenemos por ser subespacios deductivos? Por supuesto son el hecho de que el conjunto ambiente es un subespacio deductivo (la función clausura aplicada al ambiente da el ambiente y por propiedad 2 del capítulo 4, esto es equivalente a ser subespacio deductivo i.e $\delta_{[\alpha]}(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Omega(\alpha, \delta)$); y también que la intersección arbitraria de subespacios es subespacio. Por lo tanto, las propiedades que faltan son las siguientes: I: El vacío es un subespacio deductivo. II: La unión finita de subespacios es subespacio. La primera tiene ya un nombre y es equivalente a que el centro sea vacío. A esto le habíamos llamado *puro*. A la segunda propiedad, que es equivalente a pedir que la unión de un par arbitrario de subespacios sea subespacio le daremos un nombre especial, diremos que el espacio deductivo en cuestión es *elegante*. Y cuando el espacio verifica que es *puro* y *elegante*, diremos, amparados por el τ-Teorema, que es compatible con τ.

Definición 7.3 (Puro). Sea (α, δ) un espacio deductivo.
Diremos que es *Puro* sii: $\emptyset \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Observar que esta definición ya se explicitó pero de otra forma, diciendo que el centro sea vacío; pero como son equivalentes no habrá problema.

DEFINICIÓN 7.4 (Elegante). Sea (α, δ) un espacio deductivo.
Diremos que es *Elegante* sii: $A \cup B \in \Omega(\alpha, \delta)\ \forall A, B \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Diremos que es *Parcialmente Elegante* sii la unión de toda cadena ordenada por inclusión de subespacios es subespacio.

Diremos que es *Numerablemente Elegante* sii la unión de todo conjunto numerable de subespacios es subespacio.

Diremos que es *Totalmente Elegante* sii la unión arbitraria de subespacios es subespacio.

DEFINICIÓN 7.5. Sea α un conjunto. Definamos las siguientes familias y conjuntos:

- $\mathbb{D}_\alpha^\tau := \{\delta : \delta$ es un deductor en $\alpha / (\alpha, \delta)$ es puro y elegante$\}$ lo llamaremos el *campo deductivo topológico* de α .
- $\mathbb{T}_\alpha := \{\tau \subseteq \mathcal{P}(\alpha) : \tau$ es una topología en $\alpha\}$ los llamaremos el *campo topológico* de α .
- $A^c := \alpha \setminus A$ será la notación para el *complemento* de A.

LEMA 7.1. *Sea (α, δ) un espacio deductivo elegante. Entonces:*
$S_1; \ldots; S_n \in \Omega(\alpha, \delta) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i \in \Omega(\alpha, \delta) \forall n \in \mathbb{N}$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción:
Para $n = 1$ es obvio.
Para $n = 2$: (*)
Sean $S_1; S_2 \in \Omega(\alpha, \delta)$
$\Rightarrow (S_1 \cup S_2) \in \Omega(\alpha, \delta)$ porque (α, δ) es elegante.
H) Es verdad para n
T) Es verdad para $n + 1$

Prueba: Sean $S_1; \ldots; S_n; S_{n+1} \in \Omega(\alpha, \delta) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} S_i \in \Omega(\alpha, \delta)$ por hipótesis.

Y entonces; $S_{n+1} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \in \Omega(\alpha, \delta) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n+1} S_i \in \Omega(\alpha, \delta)$ por *. □

TEOREMA 7.1 (τ-Teorema). *Sea α un conjunto,*
Entonces, $\mathbb{D}_\alpha^\tau \simeq \mathbb{T}_\alpha$
i.e. Un espacio deductivo es compatible con τ sii es puro y elegante.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente con ver que::
I) $\exists \tau_\alpha : \mathbb{D}_\alpha^\tau \to \mathbb{T}_\alpha$ inyectiva
II) $\exists s_\alpha : \mathbb{T}_\alpha \to \mathbb{D}_\alpha^\tau$ inyectiva
I: Definamos $\tau_\alpha : \mathbb{D}_\alpha^\tau \to \mathbb{T}_\alpha$ como sigue:

$\tau_\alpha(\delta) := \{S^c : S \in \Omega(\alpha,\delta)\} \forall \delta \in \mathbb{D}_\alpha^\tau$
Probemos que $\tau_\alpha(\delta) \in \mathbb{T}_\alpha \forall \delta \in \mathbb{D}_\alpha^\tau$:
Sea $\delta \in \mathbb{D}_\alpha^\tau$;
Tenemos que ver que $\tau_\alpha(\delta)$ es una topología en α :
1) $\emptyset \in \Omega(\alpha,\delta)$ porque (α,δ) es puro.
$\Rightarrow \emptyset^c = \alpha \in \tau_\alpha(\delta)$
$\alpha \in \Omega(\alpha,\delta) \Rightarrow \alpha^c = \emptyset \in \tau_\alpha(\delta)$
2) Sea $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \tau_\alpha(\delta)$
$\Rightarrow \{T_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \Omega(\alpha,\delta) \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^c \in \Omega(\alpha,\delta)$ por proposición previa
$\Rightarrow (\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^c)^c \in \tau_\alpha(\delta) \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (T_\lambda^c)^c \in \tau_\alpha(\delta)$
$\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \tau_\alpha(\delta)$
3) Sea $T_1;\ldots;T_n \in \tau_\alpha(\delta)$
$\Rightarrow T_1^c;\ldots;T_n^c \in \Omega(\alpha,\delta) \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i^c \in \Omega(\alpha,\delta)$ por proposición previa porque (α,δ) es elegante.
$\Rightarrow (\bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i^c)^c \in \tau_\alpha(\delta) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} (T_i^c)^c \in \tau_\alpha(\delta) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} T_i \in \tau_\alpha(\delta)$
Veamos que τ_α es inyectiva:
Sea $\delta_1;\delta_2 \in \mathbb{D}_\alpha^\tau | \tau_\alpha(\delta_1) = \tau_\alpha(\delta_2)$
$\Rightarrow \Omega(\alpha,\delta_1) = \Omega(\alpha,\delta_2)$ (*1)
Probemos que $\delta_1 = \delta_2$:
Sea $(A,B) \in \delta_1 \Leftrightarrow B \subseteq \delta_{1[\alpha]}(A)$
$\Leftrightarrow B \subseteq \bigcap\{S \in \Omega(\alpha,\delta_1) : A \subseteq S\}$ por proposición previa
$\Leftrightarrow B \subseteq \bigcap\{S \in \Omega(\alpha,\delta_2) : A \subseteq S\}$ por *1.
$\Leftrightarrow B \subseteq \delta_{2[\alpha]}(A) \Leftrightarrow (A,B) \in \delta_2$
II: Definamos $s_\alpha : \mathbb{T}_\alpha \to \mathbb{D}_\alpha^\tau$ como sigue:
$s_\alpha(\tau) := [\varphi_\tau]_\alpha$;
con $\varphi_\tau : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$
$\varphi_\tau(A) = \overline{A}\ \forall A \subseteq \alpha$
$s_\alpha(\tau) \in \mathbb{D}_\alpha^\tau$:
$[\varphi_\tau]_\alpha$ es un deductor en α :
1) $A \subseteq \varphi_\tau(A) = \overline{A}\ \forall A \subseteq \alpha$
2) $B \subseteq \varphi_\tau(A) = \overline{A} \Rightarrow \varphi_\tau(B) = \overline{B} \subseteq \overline{A} = \varphi_\tau(A)$
Estas son propiedades de la clausura topológica.
$(\alpha, [\varphi_\tau]_\alpha)$ es topológico:
1) $\emptyset = \overline{\emptyset} = \varphi_\tau(\emptyset) \Rightarrow \emptyset \in \Omega(\alpha, [\varphi_\tau]_\alpha)$ esto porque $\emptyset$ es cerrado.
2) Sea $A;B \in \Omega(\alpha, [\varphi_\tau]_\alpha)$
$\Rightarrow A = \varphi_\tau(A) = \overline{A}; B = \varphi_\tau(B) = \overline{B} \Rightarrow A;B$ son cerrados.

$\Rightarrow (A \cup B)$ es cerrado $\Rightarrow \varphi_\tau(A \cup B) = \overline{A \cup B} = A \cup B \Rightarrow A \cup B \in \Omega(\alpha, [\varphi_\tau]_\alpha)$

Veamos que s_α es inyectiva:

Sea $\tau_1; \tau_2 \in \mathbb{T}_\alpha | s_\alpha(\tau_1) = s_\alpha(\tau_2) (\varphi_{\tau_1} = \varphi_{\tau_2})$

Tenemos que ver que $\tau_1 = \tau_2$:

$A \in \tau_1 \Leftrightarrow A^c$ es τ_1-cerrado $\Leftrightarrow \varphi_{\tau_1}(A^c) = A^c$

$\Leftrightarrow \varphi_{\tau_2}(A^c) = A^c \Leftrightarrow A^c$ is τ_2-cerrado $\Leftrightarrow A \in \tau_2$ □

7.5. Teorema Elegante

TEOREMA 7.2 (Teorema Elegante). *Sea (α, δ) un espacio deductivo.*

(α, δ) es elegante sii $\forall x \in \alpha; \forall A \subseteq \alpha; A \neq \emptyset$; $x \in \delta_{[\alpha]}(A) \Rightarrow \exists \{T_d\}_{d \in D} \subseteq A$ una τ-red tal que $T_d \to x$

DEMOSTRACIÓN. $(\Rightarrow)$ Sea $x \in \alpha$; $A \subseteq \alpha; A \neq \emptyset$ tal que $x \in \delta_{[\alpha]}(A)$

Consideremos $(\mathcal{N}_x^\tau, \geq)$ donde $U \geq V$ sii $U \subseteq V$

Este es un conjunto dirigido porque la inclusión es reflexiva y transitiva; y la tercer propiedad de un conjunto dirigido es obvia teniendo la elegancia del espacio:

Veamos que dados $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x^\tau$; entonces existe $U_0 \in \mathcal{N}_x^\tau$ tal que $U_0 \geq U_i$ $i = 1, 2$:

Es suficiente con tomar $U_0 = U_1 \cap U_2$; es claro que $U_0 \geq U_i$ $i = 1, 2$;

sólo falta probar que $U_0 \in \mathcal{N}_x^\tau$:

$U_1 \in \mathcal{N}_x^\tau \Rightarrow \exists J_1 \subseteq \alpha$ τ-abierto tal que $x \in J_1 \subseteq U_1$

$U_2 \in \mathcal{N}_x^\tau \Rightarrow \exists J_2 \subseteq \alpha$ τ-abierto tal que $x \in J_2 \subseteq U_2$

entonces $J_1^c; J_2^c \in \Omega(\alpha, \delta)$

$\Rightarrow J_1^c \cup J_2^c \in \Omega(\alpha, \delta)$ esto porque (α, δ) es elegante.

$\Rightarrow (J_1^c \cup J_2^c)^c = (J_1^c)^c \cap (J_2^c)^c = J_1 \cap J_2$ es τ-abierto

y entonces, $x \in J_1 \cap J_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = U_0$; por lo tanto $U_0 \in \mathcal{N}_x^\tau$.

Sea $T : \mathcal{N}_x^\tau \to A$ definido como sigue:

$T_U \in U \cap A \neq \emptyset$ (proposición previa)

Veamos que $T_U \to x$:

Sea $U \in \mathcal{N}_x^\tau$ entonces $\exists U_0 = U$ tal que $\forall V \geq U_0 T_V \in U$

Esto último porque $T_V \in V \cap A \subseteq U_0 \cap A \subseteq U_0 = U$.

$(\Leftarrow)$ Sean $A; B \subseteq \alpha$ tal que $A; B \in \Omega(\alpha, \delta)$

Tenemos que probar que $A \cup B \in \Omega(\alpha, \delta)$; sii $\delta_{[\alpha]}(A \cup B) = A \cup B$ por proposición previa.

y para ello es suficiente con ver que $\delta_{[\alpha]}(A \cup B) \subseteq A \cup B$ porque $\delta_{[\alpha]}$ es una función clausura.

Sea $x \in \delta_{[\alpha]}(A \cup B)$; entonces $\exists \{T_d\}_{d \in D} \subseteq A \cup B$ una τ-red tal que $T_d \to x$, esto por hipótesis (*)

Probemos que una de las siguientes afirmaciones es verdadera (las dos pueden ser ciertas):

(1) $\forall U \in \mathcal{N}_x^\tau ; U \cap A \neq \emptyset$

(2) $\forall U \in \mathcal{N}_x^\tau ; U \cap B \neq \emptyset$

Para ello es suficiente con ver que si (1) es falsa entonces (2) es verdadera:

Estamos asumiendo que $\exists V \in \mathcal{N}_x^\tau$ tal que $V \cap A = \emptyset$

Sea $U \in \mathcal{N}_x^\tau$;

y por * sabemos que $\exists u_0 \in D$ tal que $\forall d \geq u_0 T_d \in U$

y que $\exists v_0 \in D$ tal que $\forall d \geq v_0 T_d \in V$

Pero $\{T_d\}_{d \in D}$es una τ-red y entonces, $\exists d_0 \in D$ tal que $d_0 \geq u_0 ; d_0 \geq v_0$

Luego $\forall d \geq d_0 T_d \in U \cap V$, y sabemos que $\{T_d\}_{d \in D} \subseteq A \cup B$ y $V \cap A = \emptyset$

Por lo tanto, $\forall d \geq d_0 T_d \in U \cap B$ luego $T_{d_0} \in U \cap B \neq \emptyset$.

Hemos probado que (1) es verdadero o que (2) es verdadero (o ambos).

Si (1) es verdadero entonces por proposición previa $x \in \delta_{[\alpha]}(A) = A$ esto último porque $A \in \Omega(\alpha, \delta)$

Si (2) es verdadero entonces por proposición previa $x \in \delta_{[\alpha]}(B) = B$ esto último porque $B \in \Omega(\alpha, \delta)$

Luego $x \in A$ o $x \in B$, es decir, $x \in A \cup B$ como se quería probar. $\square$

7.6. Conexión

Recordemos la definición de τ-conexión.

DEFINICIÓN 7.6 (τ-conexión). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Diremos que un conjunto $C \subseteq \alpha$ es *τ-conexo* sii:

$\nexists A, B$ τ-abiertos no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \alpha$.

PROPOSICIÓN 7.3. *Sea (α, δ) un espacio deductivo puro. Entonces las siguientes son afirmaciones equivalentes:*

1. α es τ-conexo.
2. $\nexists A, B \in \Omega(\alpha, \delta)$ no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset ; A \cup B = \alpha$
3. Si $A \subseteq \alpha$ es τ-abierto y $A \in \Omega(\alpha, \delta)$ entonces $A = \alpha$ o $A = \emptyset$
4. $\nexists f : \alpha \to \{0, 1\}$ una función deductiva y sobreyectiva. $\{0, 1\}$ con el deductor discreto.

DEMOSTRACIÓN. ($1 \Rightarrow 2$): Asumamos que $\exists A, B \in \Omega(\alpha, \delta)$ no vacíos tales que

$A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \alpha$

Entonces, $A^c; B^c$ son conjuntos τ-abiertos

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \emptyset^c = \alpha$

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \alpha^c = \emptyset$

Y entonces, α no es τ -conexo. Absurdo.

$(2 \Rightarrow 3)$: Sea $A \subseteq \alpha$ τ-abierto tal que $A \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Luego $A \in \Omega(\alpha, \delta)$; $A^c \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Y $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cup A^c = \alpha$

Entonces, $A = \emptyset$ y terminamos,

o $A^c = \emptyset$ y entonces $A = \alpha$.

$(3 \Rightarrow 4)$: Asumamos $\exists f : \alpha \to \{0, 1\}$ una función sobreyectiva y deductiva.

Luego, $f^{-1}(\{1\}) \in \Omega(\alpha, \delta)$ y $(f^{-1}(\{1\}))^c = f^{-1}(\{1\}^c) = f^{-1}(\{0\}) \in \Omega(\alpha, \delta)$

Y así, $f^{-1}(\{1\}) = \alpha$ o $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$

Por lo tanto f no es sobreyectiva. Absurdo.

$(4 \Rightarrow 1)$: Asumamos que α no es τ-conexo

entonces $\exists A, B$ τ-abiertos no vacíos tales que $A \cup B = \alpha$ y $A \cap B = \emptyset$.

Definamos, $f : \alpha \to \{0, 1\}$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Es claramente sobreyectiva.

Veamos que es una función deductiva:

$\Omega(\{0, 1\}, [Id]_{\{0,1\}}) = \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \Omega(\alpha, \delta)$ por hipótesis.

$f^{-1}(\{0\}) = A = B^c \in \Omega(\alpha, \delta)$

$f^{-1}(\{1\}) = B = A^c \in \Omega(\alpha, \delta)$

$f^{-1}(\{0, 1\}) = \alpha \in \Omega(\alpha, \delta)$

Pero entonces f es una función deductiva y sobreyectiva. Absurdo. □

Observación 7.3. Si no es puro; (1),(2) y (3) siguen siendo equivalentes:

Para los otros no usamos la hipótesis, de modo que probaremos lo que falta.

Demostración. $(3 \Rightarrow 1)$: Asumamos que α no es τ-conexo.

entonces $\exists A, B$ τ-abiertos no vacíos tales que $A \cup B = \alpha$ y $A \cap B = \emptyset$.

Pero entonces, $B = A^c$ y así, $A \cup A^c = \alpha$ y $A \cap A^c = \emptyset$. Pero A y A^c son no vacíos. Absurdo. $\square$

PROPOSICIÓN 7.4 (τ-Bolzano). *Sea (α, δ) un espacio deductivo puro yτ-conexo. Entonces la imagen de α por una función deductiva en un espacio deductivo puro es τ-conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \alpha \to \beta$ es una función deductiva, Y supongamos $f(\alpha)$ no es τ-conexo entonces existe $g : f(\alpha) \to \{0, 1\}$ una función deductiva y sobreyectiva luego $g \circ f : \alpha \to \{0, 1\}$ es una función deductiva y sobreyectiva, luego α nos es τ-conexo. $\square$

PROPOSICIÓN 7.5. *Sea (α, δ) un espacio deductivo y $C \subseteq \alpha$ τ-conexo,*
y $D \subseteq \alpha$ tal que $C \subseteq D \subseteq \delta_{[\alpha]}(C)$, entonces D es τ-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que D no es τ-conexo, entonces $\exists A, B$ τ-abiertos no vacíos tales que
$(A \cap D) \cap (B \cap D) = \emptyset$ y $(A \cap D) \cup (B \cap D) = D$ luego
$C = C \cap D = (A \cap D \cap C) \cup (B \cap D \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$ entonces uno de ellos debe ser vacío porque C es τ-conexo,
por ejemplo $A \cap C$. Si $a \in A$ entonces $A \in \mathcal{N}^{\tau}_{a}$ pero $A \cap C = \emptyset$ de modo que $a \notin \delta_{[\alpha]}(C)$ y así, $a \notin D$ entonces $A \cap D = \emptyset$. Absurdo. $\square$

7.7. Compacidad

Recordemos la definición de τ-compacidad.

DEFINICIÓN 7.7 (τ-compacidad). Sea (α, δ) un espacio deductivo. Diremos que un conjunto $K \subseteq \alpha$ es *τ-compacto* sii:
$\forall \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de τ-abiertos tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $\exists F \subseteq \Lambda$ finito, tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{f \in F} A_f$.

PROPOSICIÓN 7.6. *Sea (α, δ) un espacio deductivo. Sea $K \subseteq \alpha$ τ-compacto y $S \subseteq K$ un subespacio deductivo.*
Entonces S es τ-compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento por τ-abiertos de S de modo que $K \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
Entonces $\{S^c\} \cup \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ es un cubrimiento por τ-abiertos de K, y como K es τ-compacto.
Existe un subcubrimiento finito $\{S^c, U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$,

luego $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ es un subcubrimiento finito por τ-abiertos de S. $\square$

PROPOSICIÓN 7.7. *Sean* (α, δ),(β, γ) *espacio deductivos y* $d : \alpha \to \beta$ *una función deductiva. Luego, si* $K \subseteq \alpha$ τ*-compacto, entonces* $d(K)$ *es* τ*-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento por τ-abiertos de $d(K)$.

Entonces $\{d^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento por τ-abiertos de K y tiene por lo tanto un subcubrimiento finito $\{d^{-1}(U_{\lambda_1}), \ldots, d^{-1}(U_{\lambda_n})\}$.

Y por lo tanto $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}\}$ es un cubrimiento por τ-abiertos de $d(K)$ porque

$d(K) = d(\bigcup_i d^{-1}(U_{\lambda_i})) = \bigcup_i d(d^{-1}(U_{\lambda_i})) \subseteq \bigcup_i U_{\lambda_i}$ $\square$

Ejercicios

EJERCICIO 7.1. Pruebe que efectivamente las generalizaciones vía τ son tales. ($\star\star$)

EJERCICIO 7.2. Pruebe que la familia de abiertos de una espacio métrico forma una topología. ($\star$)

EJERCICIO 7.3. Pruebe que efectivamente el concepto de límite de una sucesión es topológicamente comprensible. Pruebe que la completitud de un espacio métrico es topológicamente incomprensible, i.e. encuentre un ejemplo de dos espacios métricos, uno completo y otro no completo, de modo que entre ellos exista un homeomorfismo. ¿Por qué la prueba consiste en dicho contraejemplo? ($\star\star\star$)

EJERCICIO 7.4. Pruebe que los siguientes conceptos son eidos: τ-conexión, τ-compacidad, y todas las generalizaciones de los axiomas de separación $(\tau - T_0, \tau - T_1, \tau - T_2)$. ($\star\star$)

EJERCICIO 7.5. ¿Qué condiciones se le puede pedir a una relación de equivalencia sobre (α, δ) un espacio deductivo para que ${}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim}$ sea τ-conexo/τ-compacto? ($\star\star\star$)

EJERCICIO 7.6. ¿El producto de τ-compactos/τ-conexos es τ-compacto/τ-conexo? ($\star\star\star\star\star$)

EJERCICIO 7.7. Muestre que si un espacio deductivo no es puro, cualquier conjunto que contenga algún punto del centro es τ-compacto y además todo conjunto en dicho espacio es τ-conexo. ($\star\star$)

Ejercicio 7.8. Muestre que un ergomorfismo entre dos espacios deductivos compatibles con τ es un homeomorfismo entre el espacios topológicos inducidos. ($\star$)

Ejercicio 7.9. Suponga que se tienen dos espacios deductivos ergomorfos. Pruebe que si una sucesión es τ-convergente en uno de ellos, lo es en el otro. Muestre que una misma sucesión puede converger a dos puntos distintos. ($\star\star$)

Capítulo 8

Teoría de Grupos

```
"Cualquier relación entre números, funciones y operaciones
se hace transparente, generalmente aplicable
y completamente productiva sólo si ha sido
aislada a partir de objetos particulares
y formulada como conceptos universalmente válidos."
-Emmy Noether
```

8.1. Introducción

Vamos a considerar la teoría de los grupos, que se basa en una estructura algebraica definida como sigue:

DEFINICIÓN 8.1 (Grupo). Decimos que el par $(G, +)$ es un *grupo* si G es un conjunto no vacío, y $+ : G \times G \to G$ es una operación que verifica las siguientes propiedades:

- G es cerrado respecto de $+$. ($\forall a, b \in G \ a + b \in G$)
- $+$ es asociativa. ($\forall a, b, c \in G \ a + (b + c) = (a + b) + c$)
- Existe un elemento $0 \in G$ que es el neutro de $+$. ($\forall a \in G \ a + 0 = 0 + a = a$)
- Todo elemento de G tiene un simétrico bajo $+$. ($\forall a \in A \ \exists -a \in A$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$)

La subestructura que nos permite aquí encontrar la traducción es la de *Subgrupo*. Sobre la que se puede definir de manera natural un grupo que hereda las propiedades.

DEFINICIÓN 8.2 (Subgrupo). Sea $(G, +)$ un grupo. Diremos que un subconjunto $S \subseteq G$ es un *subgrupo* sii:

1. $0 \in S$.
2. S es cerrado respecto de $+$. ($\forall a, b \in S \ a + b \in S$)
3. S es cerrado respecto de los simétricos. ($\forall a \in S \ -a \in S$)

Ahora veremos que la familia de subgrupos de un grupo forma verifica el segundo teorema de caracterización y por lo tanto induce un espacio deductivo.

PROPOSICIÓN 8.1. *La familia de subgrupos de un grupo verifica el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(G, +)$ un grupo. Y sea $\mathcal{F}$ la familia de subgrupos del mismo.

Claramente $G \in \mathcal{F}$ por mera construcción.

Ahora sea $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{F}$ una familia de subgrupos. Probemos que $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \in \mathcal{F}$:

1) $0 \in S_\lambda \ \forall\lambda \in \Lambda$ por definición. Luego $0 \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$.

2) Sean $a, b \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ entonces $a, b \in S_\lambda \forall\lambda \in \Lambda$ es decir, $\forall\lambda \in \Lambda$ $a + b \in S_\lambda$ y por lo tanto $a + b \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$.

3) Sea $a \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ entonces $a \in S_\lambda \ \forall\lambda \in \Lambda$ es decir, $\forall\lambda \in \Lambda$ $-a \in S_\lambda$ y por lo tanto $-a \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$. □

Esto nos permite declarar ya el traductor evidente entre la teoría deductiva y la teoría de grupos.

$\rho : [A \in \Omega] \to [A\, es\, subgrupo]$

Traduciremos sobre la teoría de grupos que un conjunto es *subespacio deductivo* diciendo que es *un subgrupo.*

Las siguientes son definiciones con origen en la teoría de grupos que tienen un significado específico en teoría deductiva.

DEFINICIÓN 8.3 (Generalizaciones vía ρ). Sean $(\alpha, \delta), (\beta, \gamma)$ espacios deductivos. Sean $G \subseteq \alpha, H \subseteq \alpha, B \subseteq \alpha$,$x \in \alpha$.

Diremos que G es un *ρ-generador* de (α, δ) sii: $\delta_{[\alpha]}(G) = \alpha$.

Diremos que H es *ρ-independiente* en (α, δ) sii: $\forall A \subseteq H \ \delta_{[\alpha]}(A) \cap H = A$.

Diremos que B es una *ρ-base* de (α, δ) sii: B es un ρ-generador de (α, δ) y B es ρ-independiente en (α, δ).

Diremos que (α, δ) es *ρ-finitamente generado* sii: $\exists G \subseteq \alpha$ finito tal que $\delta_{[\alpha]}(G) = \alpha$.

Diremos que (α, δ) es *ρ-cíclico* sii: $\exists x \in \alpha$ tal que $\delta_{[\alpha]}(\{x\}) = \alpha$. Es decir, si $\{x\}$ es ρ-generador de (α, δ).

Diremos que (α, δ) es *ρ-libre* sii: $\exists B \subseteq \alpha$ una ρ-base de (α, δ).

Diremos que x es el *ρ-cero* sii: $\{x\} = \delta_{[\alpha]}(\emptyset)$. i.e sii el centro del espacio es $\{x\}$.

8.2. Algunos Resultados

PROPOSICIÓN 8.2. *Sea (α, δ) un espacio deductivo.*

Luego, $G \subseteq \alpha$ es un ρ-generador de (α, δ) sii $\forall x \in \alpha \ (G, \{x\}) \in \delta$

Demostración. ($\Leftarrow$) Veamos que $\delta_{[\alpha]}(G) = \alpha$
($\subseteq$) Está claro.
($\supseteq$) Sea $x \in \alpha \Rightarrow (G, \{x\}) \in \delta$ por hipótesis
$\Rightarrow \{x\} \subseteq \delta_{[\alpha]}(G) \Rightarrow x \in \delta_{[\alpha]}(G)$
($\Rightarrow$) Sea $x \in \alpha \Rightarrow x \in \delta_{[\alpha]}(G)$ por hipótesis
$\Rightarrow (G, \{x\}) \in \delta$ □

Proposición 8.3. *Sea (α, δ) un espacio deductivo.*
Entonces, $I \subseteq \alpha$ is ρ-independiente en (α, δ) sii $\forall i \in I \ (I \setminus \{i\}, \{i\}) \notin \delta$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $A \subseteq I$:
($\supseteq$) $A \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$, $A \subseteq I \Rightarrow A \subseteq \delta_{[\alpha]}(A) \cap I$
($\subseteq$) Supongamos que no es cierto:
$\Rightarrow \exists x \in \delta_{[\alpha]}(A) \cap I | x \notin A$
$x \in \delta_{[\alpha]}(A) \Rightarrow \{x\} \subseteq \delta_{[\alpha]}(A) \Rightarrow (A, \{x\}) \in \delta$
Entonces, $x \notin A$, $A \subseteq I$, $(A, \{x\}) \in \delta \Rightarrow I$ no es ρ-independiente en (α, δ) . Absurdo.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\exists i \in I$ tal que $(I \setminus \{i\}, \{i\}) \in \delta$
$\Rightarrow \{i\} \subseteq \delta_{[\alpha]}(I \setminus \{i\}) \Rightarrow \delta_{[\alpha]}(I \setminus \{i\}) \supseteq I$
$\Rightarrow \delta_{[\alpha]}(I \setminus \{i\}) \cap I = I$
Pero $\delta_{[\alpha]}(I \setminus \{i\}) \cap I = I \setminus \{i\}$ por hipótesis.
$\Rightarrow I = I \setminus \{x\}$ Absurdo. □

Proposición 8.4. *Sea (α, δ) un espacio deductivo ρ-finitamente generado.*
Entonces, existe una ρ-base finita de (α, δ).

Demostración. Sea $G \subseteq \alpha$ un ρ-generador finito de (α, δ) .

Nuestra estrategia será ir removiendo elementos de G de modo de seguir teniendo un ρ-generador de (α, δ) y en el proceso lograr un conjunto ρ-independiente en (α, δ) .

Sea $g_0 \in G$;
Tenemos dos opciones:
1) $(G \setminus \{g_0\}, \{g_0\}) \in \delta$
2) $(G \setminus \{g_0\}, \{g_0\}) \notin \delta$
Si es (1) veamos que $G \setminus \{g_0\}$ sigue siendo un ρ-generador de (α, δ) .

Sea $x \in \alpha$; pero G es un ρ-generador de (α, δ) , entonces por la proposición previa:
$(G, \{x\}) \in \delta$
Tenemos:

$(G \setminus \{g_0\}, G \setminus \{g_0\}) \in \delta$ por Ax.I
$(G \setminus \{g_0\}, \{g_0\}) \in \delta$ como asumimos.
$\Rightarrow (G\setminus\{g_0\} \cup G\setminus\{g_0\}, G\setminus\{g_0\} \cup \{g_0\}) \in \delta$ por proposición previa.
y $(G, \{x\}) \in \delta$ porque G es un ρ-generador de (α, δ) .
$\overset{ax,2}{\Rightarrow}$ $(G \setminus \{g_0\}, \{x\}) \in \delta$ y entonces, $G \setminus \{g_0\}$ es un ρ-generador de (α, δ) .

Seguimos haciendo lo mismo en el conjunto restante hasta que ya no podamos hacerlo más, esto sucederá eventualmente porque G es finito.

Por construcción el conjunto restante B será un ρ-generador de (α, δ) y también será ρ-independiente en (α, δ) porque si ningún elemento de B verifica (1), entonces todos verifican (2) y por la proposición anterior esto es equivalente a ser ρ-independiente en (α, δ). $\square$

Corolario 8.1. *Todos los espacios deductivos finitos son ρ-libres.*

Observación 8.1. Hay que remarcar que no siempre existe una ρ-base de un cierto espacio deductivo, tomemos el siguiente espacio deductivo: $(\mathbb{R}, [\leq]_{\mathbb{R}})$ y supongamos que existe una ρ-base, entonces tendrá que tener un elemento, porque si tiene dos o más, uno será más grande que el otro, y entonces el conjunto no será ρ-independiente. Llamemos $x \in \mathbb{R}$ a dicho número, pero $\{x\}$ no es un ρ-generador para ningún $x \in \mathbb{R}$ porque no puede generar números más pequeños como $x - 1$. De modo que este espacio deductivo no es ρ-libre.

Proposición 8.5. *Los conceptos de ρ-generador, ρ-independiente y ρ -base son eidos.*

Demostración. Sea $\xi : \alpha \to \beta$ un ergomorfismo entre (α, δ),(β, γ) espacios deductivos.

Sea $G \subseteq \alpha$ un ρ-generador de (α, δ); entonces $\delta_{[\alpha]}(G) = \alpha$
$\Rightarrow \xi(\delta_{[\alpha]}(G)) = \xi(\alpha) \Rightarrow \gamma_{[\beta]}(\xi(G)) = \beta$ y entonces, $\xi(G)$ es un ρ-generador en (β, γ) .

Sea $I \subseteq \alpha$ ρ -independiente en (α, δ) ; entonces $\forall i \in I$ $(I \setminus \{i\}, \{i\}) \notin \delta$

Probemos que $\xi(I)$ es ρ-independiente en (β, γ) ; supongamos que no:

entonces $\exists j \in \xi(I)$ tal que $(\xi(I) \setminus \{j\}, \{j\}) \in \gamma$; y entonces, $(\xi^{-1}(\xi(I) \setminus \{j\}), \xi^{-1}(\{j\})) \in \delta$
$\Rightarrow (I \setminus \xi^{-1}(\{j\}), \xi^{-1}(\{j\})) \in \delta$; sea $i_0 \in \alpha$ tal que $\xi(i_0) = j \Rightarrow$ $(I \setminus \{i_0\}, \{i_0\}) \in \delta$

luego $\exists i_0 \in I/(I \setminus \{i_0\}, \{i_0\}) \in \delta$ por lo tanto $I \subseteq \alpha$ no es ρ-independiente en (α, δ) . Absurdo.

La preservación de ρ-bases ahora es obvia. $\square$

8.3. Constructibilidad

Antes de introducir propiamente la noción de constructibilidad, daremos un ejemplo que se desprende de la teoría de grupos, y que permite dar a entender con claridad la abstracción que se pretende realizar.

Considere el grupo de los enteros con la adición usual de enteros, es decir, el grupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Es muy interesante la manera en que la operación resta «construye» los subgrupos de los enteros.

Suponga que tenemos un entero cualquiera $n \in \mathbb{Z}$, donde $n \neq 0$, es interesante observar que usando la operación resta puedo llegar paso a paso a todos los elementos del subgrupo generado por el entero en cuestión.

Es decir, en principio tengo el conjunto $\{n\}$, luego resto $n-n=0$ y ya tengo dos elementos $\{n, 0\}$ luego si tomo las cuatro combinaciones de formas de restar estos dos elementos agrego sólo un elemento más a la lista y obtengo $\{-n, 0, n\}$ si repito el proceso obtengo $\{-2n, -n, 0, n, 2n\}$, si esto lo continuamos indefinidamente obtenemos el subgrupo $n\mathbb{Z}$ que resulta ser el subgrupo generado por $\{n\}$.

Observe que si $n = 0$ esto se sigue cumpliendo. Lo otro que el lector debe notar es que si consideramos esto mismo pero con la suma, no ocurre lo mismo, no obtenemos subgrupos.

¿Qué es lo que está sucediendo aquí?

Si nos abstraemos del hecho del ejemplo en sí de la resta, estamos en presencia de una función $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, que toma un conjunto de enteros, y mediante las combinaciones de aplicar la función resta a los elementos de un conjunto, obtiene otro al cual se le une en el siguiente paso.

En el ejemplo nuestro conjunto inicial $A = \{n\}$, y en nuestro caso, $\varphi(A) = \{0\}$, luego hicimos $\varphi(\varphi(A) \cup A)) = \varphi(\{0, n\}) = \{-n, 0, n\}$, después $\varphi(\varphi(\varphi(A) \cup A)) \cup \varphi(A) \cup A) = \varphi(\{-n, 0, n\}) = \{-2n, -n, 0, n, 2n\}$...

Nos interesa por lo tanto construir en general el operador que lleva desde $\{n\}$ hasta $n\mathbb{Z}$ abstrayéndonos de este ejemplo particular. A partir de esta construcción nos interesa investigar en que casos las funciones producen imágenes que son en algún modo compatibles y construyen un espacio deductivo. Toda la maquinaria que relaciona las funciones con los espacios deductivos que genera mediante este proceso consistirá en la teoría de constructibilidad que se desarrollará en esta sección.

Definición 8.4 (Completación Natural). Sea α un conjunto, y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función

Sea $n \in \mathbb{N}$,

Definimos: $\varphi^{(n)} : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$

$$\varphi^{(n)}(A) := \begin{cases} A & n = 0 \\ \varphi(\varphi^{(n-1)}(A) \cup \varphi^{(n-2)}(A) \cup ... \cup \varphi(A) \cup A) & n > 0 \end{cases}$$

$\forall A \subseteq \alpha$

Definimos: $[\varphi] : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$

$[\varphi](A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A)\ \forall A \subseteq \alpha$

Diremos que $[\varphi]$ es la *completación natural* de φ.

Proposición 8.6. *Las completaciones naturales son funciones clausura.*

Demostración. Sea α un conjunto, y $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función.

Probemos que $[\varphi]$ es una función clausura:

El hecho de que $A \subseteq [\varphi](A)$ es claro por definición.

Sean A, B tales que $B \subseteq [\varphi](A)$

Tenemos que probar que $[\varphi](B) \subseteq [\varphi](A)$

para ello es suficiente ver que $\varphi^{(n)}(B) \subseteq [\varphi](A)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Por inducción: Para el cero es claro. $\varphi^{(0)}(B) = B \subseteq [\varphi](A)$ como asumimos.

Ahora, supongamos que $\varphi^{(n)}(B) \subseteq [\varphi](A)$ es cierto para un $n \in \mathbb{N}$ tenemos que probar que $\varphi^{(n+1)}(B) \subseteq [\varphi](A)$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$\varphi^{(l)}(B) \subseteq [\varphi](A)\ \forall l \leq n$

Por definición tenemos:

$\varphi^{(n+1)}(B) = \varphi(\bigcup_{l\leq n} \varphi^{(n)}(B)) \subseteq \varphi([\varphi](A)) =$

esto último por la hipótesis de inducción y porque la inclusión respeta las imágenes.

$= \varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\varphi^{(n)}(A)) \overset{(*)}{\subseteq}$

la primera identidad por definición, la segunda porque las imágenes respetan la unión.

$\overset{(*)}{\subseteq} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n+1)}(A) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A) = [\varphi](A)$

la segunda inclusión es trivial, la identidad es sólo la definición.

Probemos *: Veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\varphi^{(n)}(A)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n+1)}(A)$:

Es suficiente con ver $\varphi(\varphi^{(n)}(A)) \subseteq \varphi^{(n+1)}(A) \forall n \in \mathbb{N}$

$\varphi^{(n)}(A) \subseteq \bigcup_{l<n+1} \varphi^{(l)}(A)$

entonces $\varphi(\varphi^{(n)}(A)) \subseteq \varphi(\bigcup_{l<n+1} \varphi^{(l)}(A)) = \varphi^{(n+1)}(A)$ $\square$

PROPOSICIÓN 8.7. *Sea α un conjunto,*

$\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ una función.

Definimos: $\{\varphi\} := \{(A, \varphi(A)) : A \subseteq \alpha\}$

Entonces $[[\{\varphi\}]]_\alpha = [[\varphi]]_\alpha$

(el primer deductor es la completación minimal de $\{\varphi\}$, el segundo es el inducido por la completación natural de φ)

DEMOSTRACIÓN. Vamos que ver que $[[\varphi]]_\alpha$ es una completación de $\{\varphi\}$ y que es la completación minimal de $\{\varphi\}$.

$[[\varphi]]_\alpha$ es una completación de $\{\varphi\}$:

*$\{\varphi\} \subseteq [[\varphi]]_\alpha$:

Sea $(A, \varphi(A)) \in \{\varphi\}$ $(A \subseteq \alpha)$

$(A, \varphi(A)) \in [[\varphi]]_\alpha \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq [\varphi](A)$ y esto último es obvio por definición.

* $(\alpha, [[\varphi]]_\alpha)$ es un espacio deductivo porque $[[\varphi]]_\alpha$ es un deductor, y esto porque $[\varphi]$ es una función clausura.

Probemos que $[[\varphi]]_\alpha$ es la completación minimal de $\{\varphi\}$:

Sea Δ una completación de $\{\varphi\}$, veamos que $[[\varphi]]_\alpha \subseteq \Delta$

Primero vamos a ver que $(A, \varphi^{(n)}(A)) \in \Delta \ \forall A \subseteq \alpha$:

$(A, \varphi^{(0)}(A)) = (A, A) \in \Delta$ por Ax.I

$(A, \varphi^{(1)}(A)) = (A, \varphi(A)) \in \Delta$ porque $\{\varphi\} \subseteq \Delta$

$\Rightarrow (A, A \cup \varphi(A))$ por Ax.III

y $(A \cup \varphi(A), \varphi(A \cup \varphi(A))) \in \Delta$ porque $A \cup \varphi(A) \subseteq \alpha$, $\{\varphi\} \subseteq \Delta$

$\overset{Ax.II}{\Rightarrow} (A, \varphi(A \cup \varphi(A))) \in \Delta$

$(A, \varphi^{(2)}(A)) = (A, \varphi(A \cup \varphi(A))) \in \Delta$

Ahora, probemos por inducción,

Asumamos que $(A, \varphi^{(n)}(A)) \in \Delta$ para algún $n \in \mathbb{N}$,

y sin pérdida de generalidad podemos asumir también que $(A, \varphi^{(l)}(A)) \in \Delta \ \forall l \leq n$

$\overset{Ax.III}{\Rightarrow} (A, \bigcup_{l\leq n} \varphi^{(l)}(A)) \in \Delta$

y $(\bigcup_{l\leq n} \varphi^{(l)}(A), \varphi(\bigcup_{l\leq n} \varphi^{(l)}(A))) \in \Delta$ porque $\{\varphi\} \subseteq \Delta$

$\overset{Ax.II}{\Rightarrow} (A, \varphi^{(n+1)}(A)) = (A, \varphi(\bigcup_{l \leq n} \varphi^{(l)}(A))) \in \Delta$

Tenemos que $(A, \varphi^{(n)}(A)) \in \Delta \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\overset{Ax.III}{\Rightarrow} (A, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A)) \in \Delta$

Entonces, si $B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A) \Rightarrow (A, B) \in \Delta$

Sea $(A, B) \in [[\varphi]]_\alpha \Rightarrow B \subseteq [\varphi](A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(A)$

$\Rightarrow (A, B) \in \Delta$

Por lo tanto, $[[\varphi]]_\alpha \subseteq \Delta$. □

Definición 8.5 (Imagen de una Operación). Sea α un conjunto e I un conjunto de índices.

Diremos que una I-operación sobre α es una función: $f : \alpha^I \to \alpha$

Sea $A \subseteq \alpha$;

Definimos su imagen mediante: $f(A) := \{x \in \alpha : \exists a_I : I \to A / f(a_I) = x\}$

Observación 8.2. Esta es una generalización de la definición de imagen de una función $f : \alpha \to \alpha$.

Observación 8.3. El lector notará que para el conjunto vacío, el comportamiento de la imagen es siempre el mismo ($f(\emptyset) = \emptyset$) no importa la operación. Entonces en la definición de constructibilidad no tendremos en cuenta el comportamiento particular del vacío. Porque la imagen es ciega a esa información. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 8.6 (Destilación). Sea (α, δ) un espacio deductivo.

Diremos que su *destilación* es $(\alpha, \delta^\emptyset)$ donde:

$\delta^\emptyset := [\Omega(\alpha, \delta) \cup \{\emptyset\}]_\alpha$

Observación 8.4. Queda en el lector probar que esta es una buena definición, también ver que el espacio deductivo obtenido es puro y que si el espacio deductivo original es puro, su destilación es el mismo espacio. Ahora estamos en condiciones de definir la constructibilidad:

Definición 8.7 (Constructibilidad). Sea k un cardinal y (α, δ) un espacio deductivo.

Diremos que (α, δ) es *k-construible* sii existe un conjunto de índices I cuyo cardinal sea k y existe f una I-operación sobre α tal que $\delta^\emptyset = [[f]]_\alpha$.

La definición parece rebuscada pero no lo es tanto. Una operación siempre induce un espacio deductivo. Lo que hace esta definición es el camino inverso, dado el espacio deductivo no interesa obtener o tener presente una operación que induzca el espacio deductivo con el que empezamos. La definición actual hace notar que nos interesa de hecho el conjunto de índices de la operación, salvo en cuántos elementos tiene, es decir, en su cardinalidad.

Por este motivo, nos permitiremos de ahora en adelante la siguiente nomenclatura: Cuando tengamos una I-operación sobre un conjunto podremos intercambiar por k-operación cuando k sea el cardinal de I, es decir, $k = \#I$.

En este contexto diremos que f es una I-operación de (α, δ), o bien, f es una k-operación de (α, δ), o simplemente, f es una operación de (α, δ).

Ejemplo 8.1. Ahora los grupos se vuelven un ejemplo que nos permite ordenar las ideas. El espacio deductivo que proviene de cualquier grupo, siempre será 2-construible. Ya que la función resta es una 2-operación sobre el grupo que induce la destilación del espacio deductivo en cuestión.

La siguiente definición la necesitamos para proporcionar una condición necesaria de constructibilidad:

Definición 8.8 (Constructor). Sea (α, δ) un espacio deductivo, y sea k un cardinal.

Definimos su *k-constructor* como sigue: $\delta_\alpha^k : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$
$\delta_\alpha^k(A) := \bigcup_{\#W \leq k; W \subseteq A} \delta_{[\alpha]}(W) \ \forall A \subseteq \alpha$

Proposición 8.8 (Criterio de Constructiblidad). *Sea (α, δ) un espacio deductivo.*
Si (α, δ) es k-construible entonces $\delta_{[\alpha]} = [\delta_\alpha^k]$

Demostración. Tenemos que probar que $\delta_{[\alpha]}(A) = [\delta_\alpha^k](A) \ \forall A \subseteq \alpha$

Sea $A \subseteq \alpha$,
$(\supseteq)$:
$[\delta_\alpha^k](A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$:
Esto porque $\delta_\alpha^{k(n)}(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(A) \forall n \in \mathbb{N}$
Para el cero: $\delta_\alpha^k(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$:
$\delta_\alpha^k(A) = \bigcup_{\#W \leq k; W \subseteq A} \delta_{[\alpha]}(W)$ y $\forall W \subseteq A \ \delta_{[\alpha]}(W) \subseteq \delta_{[\alpha]}(A)$
Asumamos que $\delta_\alpha^{k(l)}(A) \subseteq \delta_{[\alpha]}(A) \ \forall l \leq n$

Entonces $\bigcup\limits_{l\leq n}\delta_\alpha^{k(l)}(A)\subseteq\delta_{[\alpha]}(A)$ y luego,

$\delta_\alpha^{k(n+1)}(A)=\delta_\alpha^k(\bigcup\limits_{l\leq n}\delta_\alpha^{k(l)}(A))\subseteq\delta_{[\alpha]}(A)$

esto porque estamos haciendo uniones de imágenes de la función clausura, y no pueden salirse del subespacio $\delta_{[\alpha]}(A)$.

Por lo tanto, $[\delta_\alpha^k](A)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\delta_\alpha^{k(n)}(A)\subseteq\delta_{[\alpha]}(A)$ como se quería.

($\subseteq$):

Para esto necesitamos de la hipótesis, tenemos que (α,δ) es k-construible y entonces,

$\exists f:\alpha^K\to\alpha$ con $\#K=k$ y tal que $\delta^\emptyset=[[f]]_\alpha$

Para probar que $\delta_{[\alpha]}(A)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$, veremos que $[f](A)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$ (porque sabemos que $[[f]]_\alpha=\delta^\emptyset$ i.e. $[f]=\delta_{[\alpha]}$)

Entonces es suficiente ver que $f^{(n)}(A)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)\ \forall n\in\mathbb{N}$:

Por inducción:

Para cero está claro: $A\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$.

Ahora asumamos que $f^{(l)}(A)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)\ \forall l\leq n$

Entonces $\bigcup\limits_{l\leq n}f^{(l)}(A)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$

Afirmación: Si $D\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$ entonces $f(D)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$

Si la afirmación es cierta tenemos que

$f^{(n+1)}(A)=f(\bigcup\limits_{l\leq n}f^{(l)}(A))\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$ como queríamos.

Prueba de la afirmación: Sea $x\in f(D)$,

Entonces $\exists h:K\to D$ tal que $f(h)=x$

Y luego, $x\in\delta_{[\alpha]}(h(K))\subseteq\bigcup\limits_{\#W\leq k;W\subseteq D}\delta_{[\alpha]}(W)=\delta_\alpha^k(D)$ esto porque $\#h(K)\leq k$ y $h(K)\subseteq D$

por lo tanto $x\in\delta_\alpha^k(D)\subseteq[\delta_\alpha^k](D)\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$ la primer inclusión se da por definición, la segunda porque $[\delta_\alpha^k]$ es una función clausura y $D\subseteq[\delta_\alpha^k](A)$ como habíamos asumido. $\square$

Ejemplo 8.2. Vamos a utilizar este criterio para probar que el espacio deductivo inducido por el grupo usual en $\mathbb{Z}$ no es 1-construible.

Tenemos lo siguiente: $[[-]_{[\mathbb{Z}]}^1](\{2,3\})=2\mathbb{Z}\cup3\mathbb{Z}\neq\mathbb{Z}=[-]_{[\mathbb{Z}]}(\{2,3\})$, es decir, encontramos un conjunto donde el deductor no coincide con el 1-constructor del espacio. Por lo tanto, este espacio no es 1-construible. Esto motiva la siguiente:

Definición 8.9 (Conjunto k-Crítico). Sea (α,δ) un espacio deductivo y sea k un cardinal.

Diremos que $A\subseteq\alpha$ es un conjunto *k-crítico* sii: $\delta_{[\alpha]}(A)\neq[\delta_\alpha^k](A)$

PROPOSICIÓN 8.9. *Si un espacio deductivo es k-construible, entonces es w-construible para todo $w \geq k$*

DEMOSTRACIÓN. A cargo del lector (en los ejercicios se da una sugerencia).

Esta proposición motiva la siguiente definición: $\square$

DEFINICIÓN 8.10 (Orden). Sea (α, δ) un espacio deductivo.

Diremos que su *orden* es el mínimo cardinal k, tal que el espacio es k-construible.

Es decir, $\#(\alpha, \delta) = min\{k$ cardinal : (α, δ) es k-construible$\}$.

PROPOSICIÓN 8.10. *El orden es un eidos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos.

Sea $\xi : \alpha \to \beta$ un ergomorfismo. Sea I un conjunto de modo que $\#(\alpha, \delta) = \#I$

Sea $f : \alpha^I \to \alpha$ una operación en (α, δ)

Vamos a probar que $g : \beta^I \to \beta$ definida como sigue, es una operación de (β, γ):

$g(w) := \xi(f(\xi^{-1} \circ w)) \; \forall w \in \beta^I$

Tenemos que probar que $g[S] = \gamma_{[\beta]}(S) \; \forall S \subseteq \beta$, $S \neq \emptyset$:

Sea $S \neq \emptyset$ entonces:

$\xi^{-1} \circ \gamma_{[\beta]}(S) = \delta_{[\alpha]} \circ \xi^{-1}(S)$ (aquí abusamos un poco de la notación)

entonces $\gamma_{[\beta]}(S) = \xi(\delta_{[\alpha]}(\xi^{-1}(S))) = \xi(f[\xi^{-1}(S)]) = g[S]$

Tenemos que probar que no hay un conjunto J tal que $\#J < \#I$ y tal que existe $\hat{g} : \beta^J \to \beta$ una operación de (β, γ).

Asumamos que algo así es posible, podríamos construir una función construida análogamente: $\hat{f} : \alpha^J \to \alpha$ que sería una operación de (α, δ);

y entonces (α, δ) sería $\#J$-construible con $\#J < \#I = \#(\alpha, \delta)$. Absurdo. $\square$

Ejercicios

EJERCICIO 8.1. Pruebe que la topología usual de $\mathbb{R}$ no es k-construible para ningún k finito. $(\star\star\star)$

EJERCICIO 8.2. Pruebe la proposición: *Si un espacio deductivo es k-construible, entonces es w-construible para todo $w \geq k$.* Sugerencia: Al considerar la operación, basta definirla de manera que en los primeros k argumentos tome los argumentos de la operación dada por la constructibilidad, e ignore los demás argumentos y cuya imagen sea la misma que la de la operación dada. Luego es casi automático verificar que ambas operaciones inducen el mismo espacio. ($\star$)

Ejercicio 8.3. Pruebe que los conceptos de conjunto ρ-generador y de conjunto τ-denso coinciden. ($\star\star$)

Ejercicio 8.4. Pruebe que el recíproco del criterio de constructibilidad es falso. ($\star\star\star$)

Ejercicio 8.5. Considere sobre $\mathbb{R}$ la siguiente operación: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy$. Encuentre los subespacios y la clausura. Pruebe que no es 1-construible usando el criterio, concluya que su orden es 2. ¿Es τ-conexo? ¿Es τ-compacto? Pruebe que si un subespacio tiene más de tres elementos entonces tiene infinitos elementos. Compare este espacio deductivo con el inducido por la operación $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $g(x,y,z) = xyz$.
($\star\star$)

Ejercicio 8.6. Observe que las operaciones usuales de suma y resta en $\mathbb{Z}$ inducen dos espacios deductivos distintos. Pruebe que en $\mathbb{Z}_m$ con m natural, ambos espacios deductivos coinciden. ($\star\star$)

Ejercicio 8.7. Pruebe que la siguiente operación induce el espacio deductivo τ-compatible con la topología usual de $\mathbb{R}$.
$f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$

$$f(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \begin{cases} x & \text{conj. de puntos de ac. de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es } \{x\} \\ x_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Use esto y uno de los ejercicios anteriores para encontrar el orden. ($\star\star\star$)

Ejercicio 8.8. Considere dos espacios deductivos sobre el mismo conjunto, de ordenes k y m. ¿Se puede establecer una regla para el orden de la intersección de dichos espacios? ($\star\star\star\star$)

Ejercicio 8.9. Un espacio deductivo no finito que sea 1-construible no es discreto. ($\star\star\star$)

Ejercicio 8.10. Pruebe la siguiente proposición: Sea (α, δ) un espacio deductivo compatible con ρ, entonces:
1. (α, δ) tiene un ρ-cero.
2. $(A, B) \in \delta$ entonces $\forall b \in B$ $\exists a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $b \in \delta_{[\alpha]}(\{a_1, \ldots, a_n\})$
3. $I \subseteq \alpha$ es ρ-independiente sii $\forall F \subseteq I$ finito, F es ρ-independiente.
4. (α, δ) tiene un conjunto ρ-independiente maximal.

(Sugerencia: Use 2 para probar 3 y 3 para probar 4 mediante el lema de Zorn) ($\star\star\star\star$)

Capítulo 9

Teoría del Preorden

```
"Algunos misterios siempre escaparán a la mente humana.
Para convencernos de ello, sólo hay que echar un vistazo
a las tablas de los números primos,
y ver que no reina ni orden ni reglas."
-Evariste Galois
```

9.1. El Casi Contraejemplo $ded - pre$

Como sabemos, todo preorden induce un espacio deductivo. Esto se vio en los ejemplos del capítulo 1:

Sea $(\alpha, \leq)$ un conjunto con un preorden. Bastará considerar $[\leq]_\alpha := \{(A,B) \in \mathcal{P}(\alpha) \times \mathcal{P}(\alpha) : \forall b \in B \exists a \in A \; tal \; que \; a \leq b\}$ como deductor para obtener fácilmente un espacio deductivo. Esto significa también que tendremos un traductor canónico al cual llamamos $\varepsilon : ded \to pre$.

Sin embargo es muy notorio que todo espacio deductivo induce un preorden sobre la potencia del conjunto origen. Es decir, si tenemos un espacio deductivo (α, δ), tendremos automáticamente el preorden $(\mathcal{P}(\alpha), \delta)$ donde $A\delta B$ sii $(A,B) \in \delta$. Las propiedades reflexiva y transitiva son automáticas de los axiomas I y III. Uno podría llegar a pensar que este hecho permitía inducir un traductor al que llamaremos provisoriamente: $\omega : pre \to ded$. Veremos luego que no es el caso.

Consideremos los conceptos inducidos sobre teoría deductiva desde la teoría del preorden.

Por ejemplo, ¿Qué sería un $\omega\rho$-generador? En teoría deductiva G es un ρ-generador en (α, δ) sii: $\forall x \in \alpha \; (G, \{x\}) \in \delta$. Como consideramos el preorden sobre $\mathcal{P}(\alpha)$ traducimos: G es un $\omega\rho$-generador sii: $\forall A \in \mathcal{P}(\alpha) \; G \leq A$ i.e. los conceptos de $\omega\rho$-generador y *mínimo* coinciden en la teoría del preorden.

Hasta aquí no parece haber ningún inconveniente.

Consideremos ahora la traducción del concepto de ρ-independiente sobre la teoría del preorden:

Sabemos que I es ρ-independiente sii: $\forall A \subseteq I\ \delta_{[\alpha]}(A) \cap I = A$.

La que pretendía ser una traducción no puede traducir esta definición ya que $\mathcal{P}(\alpha)$ posee una estructura adicional a la del preorden inducido por el espacio deductivo, que es la relación de inclusión, es decir, cuando hicimos abstracción de $\mathcal{P}(\alpha)$ como un conjunto cualquiera dotado de un preorden especial δ, perdimos bastante información que es natural a la estructura original pero que no tiene una correlación en la teoría de llegada. Todo esto nos está diciendo que de hecho la aplicación entre espacios asociados que explicitamos más arriba no es un transformador i.e. no proviene de ningún traductor.

¿Por qué *casi contraejemplo*?, porque si la aplicación anterior fuese un transformador, estaríamos en presencia de dos traductores mutuos entre teorías sabiendo claramente que ambas son distintas, y por lo tanto que no existe un ergomorfismo entre ellas. Si así fuera, este sería un contraejemplo que permitiría dar una respuesta negativa al problema de traducciones mutuas entre espacios deductivos.

9.2. El Contraejemplo $pre - dgf$

Aquí presentaremos el contraejemplo que necesitábamos, se trata de las traducciones canónicas entre la teoría del preorden (pre) y la teoría de grafos dirigidos (dgf).

Por supuesto a la teoría del preorden nos referimos al estudio de espacios de la forma $(\alpha, \leq)$ donde el primero es un conjunto, y el segundo es una relación que es reflexiva y transitiva.

Por otra parte definiremos lo que es un grafo dirigido:

Definición 9.1 (Grafo Dirigido). Diremos que un par (α, Γ) es un *grafo dirigido* sii: α es un conjunto y $\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \alpha \times \alpha$, es decir, es un conjunto de pares ordenados de elementos de α, donde $\Delta = \{(a, a) \in \alpha \times \alpha : a \in \alpha\}$.

Observación 9.1. Esta última condición es necesaria para las definiciones siguientes, básicamente el hecho de que $a \leq a\ \forall a \in \alpha$ implica que necesitamos que $(a, a) \in \Gamma\ \forall a \in \alpha$ para que tengan sentido las traducciones mutuas que se definirán. Por cuestiones de notación diremos: $a \to b$ en vez de $(a, b) \in \Gamma$.

Veremos que entre las dos teorías anteriores existen mutuas traducciones.

Considere las siguientes traducciones:

$\varphi : [a \leq b] \mapsto [\exists c_1, ..., c_n$ tales que $a \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b]$

Es decir, que un elemento sea menor que otro se traduce como que existe un camino dirigido que va desde el primer elemento al segundo.

$\psi : [a \to b] \mapsto [a \leq b]$

Esto es, traducimos el hecho de que estén conectados diciendo que verifican la relación.

Veamos primero que ambas son traducciones (las demostraciones en este caso son más bien esquemas de demostración, las pruebas no pretenden ser exhaustivas ya que corresponden a maquinaria matemática cuyo interés queda por fuera de lo que se verá en este libro, vale decir, lo siguiente es meramente ilustrativo):

φ es inyectiva:

Supongamos que $\varphi(p) = \varphi(q)$, vamos a suponer que las afirmaciones p, q son de la forma $a_0 \leq b_0$, $a_1 \leq b_1$ respectivamente.

De modo que estamos en presencia de lo siguiente:

$[\exists c_1, ..., c_n$ tales que $a_0 \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b_0] =$

$[\exists d_1, ..., d_k$ tales que $a_1 \to d_1 \to \ldots \to d_k \to b_1]$

Es decir, tenemos caminos en el grafo, desde a_0 a b_0 y desde a_1 hasta b_1, y además dichas afirmaciones son equivalentes.

Por lo tanto esta igualdad nos dice que de hecho que $n = k$, $c_i = d_i \forall i$ y también que $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$, lo que es lo mismo que decir que p y q son la misma afirmación.

φ respeta la estructura deductiva, es decir, $\varphi \circ [\leq]_{[\alpha]}([a \leq b]) = [\to]_{[\alpha]} \circ \varphi([a \leq b])$:

Para esto tomaremos la siguiente afirmación (lo correcto sería tomar una afirmación arbitraria): $[x \leq a \Rightarrow x \leq b]$ que es un elemento particular en $[\leq]_{[\alpha]}([a \leq b])$ cuya imagen por φ es:

$J := [\exists c_1, ..., c_n$ tales que $x \to c_1 \to \ldots \to c_n \to a \Rightarrow$

$\exists d_1, ..., d_k$ tales que $x \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b]$

Es fácil verificar que J está en $[\to]_{[\alpha]} \circ \varphi([a \leq b])$:

$\varphi([a \leq b]) = [\exists h_1, ..., h_l$ tales que $a \to h_1 \to \ldots \to h_l \to b]$

Teniendo esto y suponiendo que $\exists c_1, ..., c_n$ tales que $x \to c_1 \to \ldots \to c_n \to a$, podemos implicar que

$\exists c_1, ..., c_n, h_1, ..., h_l$ tales que $x \to c_1 \to \ldots \to c_n \to a \to h_1 \to \ldots \to h_l \to b]$

De modo que $\exists d_1, ..., d_k$ tales que $x \to d_1 \to \ldots \to d_k \to b$ y por lo tanto $J \in [\Gamma]_{[\alpha]} \circ \varphi([a \leq b])$.

La prueba (ilustrativa) de que la otra aplicación (ψ) es un traductor queda a cargo del lector.

Tenemos lo siguiente:

$\psi \circ \varphi = id$: $[a \leq b] \overset{\varphi}{\mapsto} [\exists c_1, ..., c_n$ tales que $a \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b] \overset{\psi}{\mapsto} [\exists c_1, ..., c_n$ tales que $a \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n \leq b] = [a \leq b]$

Sin embargo en el otro sentido no sucede:

$\varphi \circ \psi \neq id$: $[a \to b] \overset{\psi}{\mapsto} [a \leq b] \overset{\varphi}{\mapsto} [\exists c_1, ..., c_n$ tales que $a \to c_1 \to \ldots \to c_n \to b] \neq [a \to b]$

Hemos encontrado un par de traductores mutuos entre teorías no ergomorfas. Damos al problema una respuesta negativa.

9.3. Introducción

Se ha explicitado el transformador asociado que va desde los preordenes hacia los espacios deductivos. Este proviene del traductor canónico $\varepsilon : ded \to pre$ que es el siguiente:

$\varepsilon : [(A, B) \in \delta] \mapsto [\forall b \in B \exists a \in A$ tal que $a \leq b]$ (donde queda obviado el conjunto origen, y donde el deductor es δ y el preorden es $\leq$)

Las siguientes son definiciones con origen en la teoría del preorden que tienen un significado específico en teoría deductiva.

Definición 9.2 (Generalizaciones vía ε). Sea (α, δ) espacio deductivo. Sean $A \subseteq \alpha, x \in \alpha$.

Diremos que x es una *ε-cota inferior* de A sii: $\forall y \in A$ $(\{x\}, \{y\}) \in \delta$ i.e. sii $(\{x\}, A) \in \delta$.

Diremos que x es una *ε-cota superior* de A sii: $\forall y \in A$ $(\{y\}, \{x\}) \in \delta$. (observar que esto no es lo mismo que decir que $x \in \delta_{[\alpha]}(A)$, la condición de ser ε-cota superior es más fuerte)

Diremos que x es un *ε-mínimo* sii: x es ε-cota inferior de α. (observar que un espacio deductivo es ρ-cíclico sii existe un ε-mínimo)

Diremos que x es un *ε-máximo* sii: x es ε-cota superior de α. (observar que los conceptos de ε-máximo y ρ-cero coinciden)

Diremos que (α, δ) es *ε-parcial* sii: $\forall x, y \in \alpha$ $(\{x\}, \{y\}) \in \delta$, $(\{y\}, \{x\}) \in \delta$ implica que $x = y$.

Diremos que (α, δ) es *ε-total* sii: $\forall x, y \in \alpha$ se verifica que $(\{x\}, \{y\}) \in \delta$ o $(\{y\}, \{x\}) \in \delta$.

Definición 9.3 (Orden). Diremos que un *orden* es un par $(\alpha, \leqq)$ donde α es un conjunto y $\leqq$ es una relación en α que verifica las siguientes propiedades:

1. $a \leqq a$ $\forall a \in \alpha$ (Propiedad Reflexiva)
2. Si $a \leqq b$ y $b \leqq a$ entonces $a = b$ $\forall a, b \in \alpha$ (Propiedad Antisimétrica)

3. Si $a \leqq b$ y $b \leqq c$ entonces $a \leqq c$ $\forall a, b, c \in \alpha$ (Propiedad Transitiva)

OBSERVACIÓN 9.2. Un orden, por lo tanto, es un preorden que además verifica la propiedad antisimétrica.

DEFINICIÓN 9.4 (Relación de Equivalencia). Diremos que una *relación de equivalencia* sobre el conjunto α es una relación $\approx$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $a \approx a$ $\forall a \in \alpha$ (Propiedad Reflexiva)
2. Si $a \approx b$ entonces $b \approx a$ $\forall a, b \in \alpha$ (Propiedad Simétrica)
3. Si $a \approx b$ y $b \approx c$ entonces $a \approx c$ $\forall a, b, c \in \alpha$ (Propiedad Transitiva)

9.4. ε-Teorema

TEOREMA 9.1 (ε-Teorema). *Un espacio deductivo es compatible con ε sii es totalmente elegante.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Sea (α, δ) un espacio deductivo compatible con ε. Y sea $(\alpha, \leq)$ un preorden tal que $[\leq]_\alpha = \delta$.

Veamos que es totalmente elegante:

Sea $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \Omega(\alpha, \delta)$, veamos que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \in \Omega(\alpha, \delta)$.

Sea entonces $x \in \delta_{[\alpha]}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)$, veamos que $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$:

Como $x \in \delta_{[\alpha]}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)$ esto significa que $\exists\lambda_0 \in \Lambda$ y $\exists y \in S_{\lambda_0}$ tal que $y \leq x$, pero entonces $x \in \delta_{[\alpha]}(S_{\lambda_0}) = S_{\lambda_0} \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$.

($\Leftarrow$) Sea (α, δ) un espacio deductivo totalmente elegante.

Vamos a construir un preorden $\leq$ en α y veremos que dicho preorden verifica que $[\leq]_\alpha = \delta$

Definimos dicho preorden mediante: $x \leq y$ sii: $y \in \delta_{[\alpha]}(\{x\})$.

Veamos que es un preorden:

Reflexiva: Claramente $x \leq x$ para todo $x \in \alpha$ porque $x \in \delta_{[\alpha]}(\{x\})$ por propiedad de extensividad de las clausuras.

Transitividad: Supongamos que $x \leq y$ y que $y \leq z$ para ciertos $x, y, z \in \alpha$

Es decir, tenemos que $y \in \delta_{[\alpha]}(\{x\})$ y $z \in \delta_{[\alpha]}(\{y\})$.

Pero por tope y ya que $y \in \delta_{[\alpha]}(\{y\})$, se tiene que $z \in \delta_{[\alpha]}(\{y\}) \subseteq \delta_{[\alpha]}(\{x\})$.

Veamos que esta relación induce el mismo espacio deductivo, es decir, $\delta = [\leq]_\alpha$, para ello veamos que $\Omega(\alpha, \delta) = \Omega(\alpha, [\leq]_\alpha)$:

($\subseteq$) Sea $S \in \Omega(\alpha, \delta)$,

Tenemos que probar que $[\leq]_{[\alpha]}(S) = S$:
$[\leq]_{[\alpha]}(S) = \bigcup\{A \subseteq \alpha : (S, A) \in [\leq]_\alpha\} =$
$= \bigcup\{A \subseteq \alpha : \exists s \in S, a \in A \text{ tal que } s \leq a\}$
$= \{x \in \alpha : \exists s \in S \text{ tal que } s \leq x\}$
$= \{x \in \alpha : \exists s \in S \text{ tal que } x \in \delta_{[\alpha]}(\{s\})\}$
$= \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\}) \overset{(*)}{=} S$

Veamos *: Primero tenemos que $\forall s \in S\ s \in \delta_{[\alpha]}(\{s\}) \subseteq S$; esto por la propiedad de tope ya que $S \in \Omega(\alpha, \delta)$.

De modo que $\bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\}) \subseteq S$ y trivialmente $S \subseteq \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$. (si $s \in S$ entonces $s \in \delta_{[\alpha]}(\{s\}) \subseteq \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$).

($\supseteq$) Sea $S \in \Omega(\alpha, [\leq]_\alpha)$:

Veamos que $S \in \Omega(\alpha, \delta)$:

Para ello bastará ver que $\delta_{[\alpha]}(S) = S$, y a su vez es suficiente con ver que $\delta_{[\alpha]}(S) \subseteq S$ porque $S \subseteq \delta_{[\alpha]}(S)$ por propiedad de extensividad de las funciones clausura.

Sea entonces $x \in \delta_{[\alpha]}(S)$,

Por otro lado tenemos que $\bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$ es un subespacio ya que es una unión de subespacios, esto porque (α, δ) es totalmente elegante.

De manera que $\delta_{[\alpha]}(\bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})) = \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$

Por lo tanto $x \in \delta_{[\alpha]}(S)$ entonces $x \in \delta_{[\alpha]}(\bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})) = \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$

(lo primero porque $S \subseteq \bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$ y por la propiedad de monotonía de las clausuras respecto de la inclusión, lo segundo porque $\bigcup_{s \in S} \delta_{[\alpha]}(\{s\})$ es un subespacio)

Luego, $\exists s \in S$ tal que $x \in \delta_{[\alpha]}(\{s\})$, entonces $\exists s \in S$ tal que $s \leq x$

Así tenemos que $x \in [\leq]_{[\alpha]}(S) = S$ □

Ejercicios

Ejercicio 9.1. Pruebe que el espacio inducido sobre los reales, por las relaciones de orden: «menor o igual que» y «mayor o igual que» son ergomorfos. Pruebe que estos espacios son $\tau - T_0$ pero no son $\tau - T_1$. ($\star\star$)

Ejercicio 9.2. Pruebe que la traducción del concepto de subespacio deductivo sobre las teorías de orden y relación de equivalencia dan respectivamente los conceptos de conjunto superior y conjunto de clases de equivalencia. ($\star\star$)

Ejercicio 9.3. Pruebe que el conjunto de números naturales, con la relación de orden usual, es 1-construible; pero el conjunto de números enteros con el orden usual no lo es. $(\star\star\star)$

Ejercicio 9.4. Pruebe que un espacio deductivo 1-construible es totalmente elegante y la clausura de todo conjunto numerable es numerable.

¿Qué condiciones se le puede imponer a un espacio compatible con ε para que sea 1-construible? $(\star\star\star)$

Ejercicio 9.5. Considere cierta relación de equivalencia $\sim$ en α. ¿Cómo debe ser el deductor δ en α para que se verifique que ${}^{(\alpha,\delta)}/_{\sim} \equiv (\alpha, [\sim]_\alpha)$? $(\star\star\star\star)$

Ejercicio 9.6. Pruebe que un espacio deductivo (α, δ) es inducido por un orden (es compatible con $\gamma\varepsilon$) sii es totalmente elegante y además $\delta_{[\alpha]}(\{x\}) = \delta_{[\alpha]}(\{y\})$ implica $x = y$ $\forall x, y \in \alpha$. $(\star\star)$

Ejercicio 9.7. Pruebe que un espacio deductivo (α, δ) es inducido por una relación de equivalencia (es compatible con $\eta\varepsilon$) sii $\forall S, T \in \Omega(\alpha, \delta)$ $S = T$ o $S \cap T = \emptyset$.

Sugerencia: Observe que un espacio deductivo compatible con $\eta\varepsilon$, es en particular compatible con ε y por lo tanto totalmente elegante. Pruebe directamente que la condición $\forall S, T \in \Omega(\alpha, \delta)$ $S = T$ o $S \cap T = \emptyset$, implica la elegancia total. $(\star\star)$

Ejercicio 9.8. Estudie el espacio deductivo inducido por la familia $C_{\leq} = \Omega(\alpha, [\leq]_\alpha) \cap \Omega(\alpha, [\geq]_\alpha)$ donde $a \leq b$ sii $b \geq a$ $\forall a, b \in \alpha$, es decir, son preordenes duales. A los elementos de esta familia los llamamos conexos respecto del preorden $\leq$. Observe que si $\alpha = \mathbb{R}$ con el orden usual, los subespacios son exactamente los intervalos; vea que sucede en el caso de los enteros con el orden usual. $(\star\star\star)$

Ejercicio 9.9. Muestre que un espacio deductivo es ρ-cíclico sii existe un ε-mínimo. Muestre que los conceptos de ε-máximo y ρ-cero coinciden. Encuentre ejemplos de los conceptos de los capítulos 7 y 8. Muestre que cada uno de dichos conceptos es eidos. $(\star\star)$

Capítulo 10

Teoría de Anillos y Módulos

`"Como para todo lo demás,`
`también para una teoría matemática:`
`la belleza puede ser percibida pero no explicada."`
`-Arthur Cayley`

Consideramos conjuntamente estas dos teorías por que veremos que desde el punto de vista deductivo, son construcciones que se pueden abstraer de una forma más amigable y limpia.

10.1. Introducción

DEFINICIÓN 10.1 (Anillo). Diremos que un *anillo* es una quíntupla $(A, +, \cdot, 0, 1)$ donde A es un conjunto, $0, 1 \in A$ y $+, \cdot : A \to A$ son funciones que verifican las siguientes propiedades:

- $(A, +, 0)$ es un grupo abeliano (es decir, es un grupo donde además $+$ es conmutativa)
- $(A, \cdot, 1)$ es un monoide (1 es neutro respecto de $\cdot$ y además $\cdot$ es asociativo)
- $\cdot$ es distributiva respecto de $+$ ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y además $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$)

Tal vez existan discrepancias con algunos textos, ya que en algunos esto es llamado *anillo con unidad* y en la anterior definición se omite la propiedad de neutro de $\cdot$.

Como se vio anteriormente, tenemos la traducción canónica $\theta : ded \to rng$ dada por [A es subespacio deductivo] $\mapsto$ [A es subanillo]

Vamos a considerar varios conceptos sobre teoría deductiva que son generalizaciones vía este traductor.

DEFINICIÓN 10.2 (Generalizaciones vía θ). Sean (α, δ),(β, γ) espacios deductivos, sea $I \subseteq \alpha$ y también sea $d : \alpha \to \beta$ una función deductiva.

Diremos que el *θ-núcleo* de la función d es: $N(d) := d^{-1}(\gamma_{[\beta]}(\emptyset))$, es decir, a la preimagen del centro.

Diremos que I es un *θ-ideal* en (α, δ) sii existe una función deductiva d_I de modo que $N(d_I) = I$.

OBSERVACIÓN 10.1. Observe que en los anillos y en los grupos, el centro es el conjunto $\{0\}$ donde 0 es el neutro de la suma. Con esto en vista, uno se da cuenta de que el concepto de θ-núcleo es una generalización del concepto de núcleo presente en teoría de grupos, anillos y módulos.

OBSERVACIÓN 10.2. El θ-núcleo y por lo tanto también los θ-ideales son subespacios deductivos. Ya que por definición son preimágenes de funciones deductivas de cierto subespacio deductivo.

OBSERVACIÓN 10.3. Si aplicamos el traductor ρ sobre el concepto de θ-ideal obtenemos la definición de subgrupo normal. Y por supuesto si lo aplicamos sobre el concepto de θ-núcleo obtenemos otra vez la definición de núcleo pero esta vez sobre la teoría de grupos.

OBSERVACIÓN 10.4. Vamos a centrar nuestra atención sobre cuatro espacios deductivos que se encuentran de forma natural en un anillo. El primero es el inducido por los subgrupos, el segundo es el inducido por los subanillos, el tercero es el inducido por los ideales del anillo, y el cuarto es el inducido por lo que llamaremos *conjuntos multiplicados*: Si tengo un anillo $(A, +, \cdot, 0, 1)$, un conjunto C se dirá *multiplicado* sii para todo $x \in A$, el conjunto Ax está incluido en C. Es decir, $\forall x \in C \forall a \in A \; ax \in C$. El lector debe observar que esto no constituye necesariamente un subgrupo, es decir, no constituye necesariamente un ideal del anillo.

Si vemos a estos espacios deductivos y observamos la interacción entre sus funciones clausura nos damos cuenta de un hecho muy peculiar: El espacio deductivo de los ideales es la composición de las clausura de los subgrupos y de los conjuntos multiplicados.

En el caso de los módulos ocurre algo muy similar (trataremos el caso de los módulos a izquierda, las consideraciones particulares respecto de la conmutatividad y demás detalles no nos interesarán ni serán tenidos en cuenta):

DEFINICIÓN 10.3 (Módulo). Sea A un anillo, M un conjunto, $0 \in M$ y dos funciones $+ : M \times M \to M \; \cdot : A \times M \to M$

Diremos que un *A-módulo a izquierda* M es una cuaterna $(M, +, \cdot, 0)$ sii:

- $(M, +, 0)$ es un grupo abeliano.
- Se verifican las siguientes propiedades:
    1. $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ con $a \in A$ y $m, n \in M$

2. $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m$ con $a, b \in A$ y $m \in M$
3. $(ab)\cdot m = a\cdot(b\cdot m)$
4. $1_A \cdot m = m$

DEFINICIÓN 10.4 (Submódulo). Sea $(M, +, \cdot, 0)$ un A-módulo a izquierda.

Diremos que $S \subseteq M$ es un A-*submódulo* sii: S es subgrupo y además $\forall a \in A$ y $\forall s \in S$ $a \cdot s \in S$.

OBSERVACIÓN 10.5. Básicamente si uno considera al anillo A como un A-módulo con la acción usual, obtiene que los submódulos son exactamente los ideales.

10.2. Deductivo Composición

Tenemos por lo tanto que el espacio deductivo inducido por los subanillos es una composición entre dos espacios deductivos. El de los subgrupos y el de los conjuntos multiplicados (A-estables).

Todo esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 10.5 (Deductivo Composición). Sean dos espacios deductivos sobre el mismo conjunto, es decir, (α, δ), (α, γ) y de modo que $\delta_{[\alpha]} \circ \gamma_{[\alpha]} = \gamma_{[\alpha]} \circ \delta_{[\alpha]}$.

Diremos que el *deductivo composición* (o el deductivo de la composición) entre (α, δ) y (α, γ) es el que tiene por función clausura a $\delta_{[\alpha]} \circ \gamma_{[\alpha]}$.

La notación, siempre que corresponda, será: $(\alpha, \delta \circ \gamma)$.

Esta definición por supuesto se puede generalizar a una cantidad arbitraria de espacios deductivos que conmuten.

OBSERVACIÓN 10.6. Usando un ejercicio del capítulo 1 se ve fácilmente que esto está bien definido ya que esta composición es también una función clausura.

DEFINICIÓN 10.6 (Espacio Deductivo Compuesto). Decimos que un espacio deductivo es *compuesto* si es el deductivo composición de otros dos espacios deductivos distintos del original.

OBSERVACIÓN 10.7. Observe que un espacio deductivo conmuta con sí mismo y su composición es el propio espacio deductivo.

Ejercicios

EJERCICIO 10.1. Considere un espacio deductivo compatible con θ. Encuentre una operación que lo induzca. ¿Cuál es el orden máximo que puede tener? $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.2. Encuentre un ejemplo en teoría de anillos de un conjunto multiplicado que no sea subgrupo. $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.3. Pruebe que los espacios deductivos inducidos por la topología usual y por la envolvente convexa en $\mathbb{R}^n$ conmutan. Describa el espacio deductivo de su composición. $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.4. Pruebe que los conjuntos multiplicados de un anillo y de un módulo verifican el segundo teorema de caracterización de espacios deductivos. $(\star\star)$

Ejercicio 10.5. Pruebe que los espacios deductivos inducidos por los subgrupos y por los conjuntos multiplicados tienen clausuras que conmutan. Y su deductivo composición es el inducido por los ideales y por los submódulos en los contextos correspondientes. $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.6. ¿Qué sucede si tomamos el deductivo composición de dos espacios y luego a este lo intersectamos con uno de dichos espacios en el sentido de intersectar sus clausuras? $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.7. Suponga que dos espacios deductivos compatibles con θ son ergomorfos. ¿Son isomorfos los anillos que inducen dichos espacios deductivos? $(\star\star)$

Ejercicio 10.8. Suponga que dos espacios deductivos compatibles con θ conmutan. ¿Su composición es compatible con θ? Haga la misma pregunta pero intercambiando θ por ρ. $(\star\star\star\star)$

Ejercicio 10.9. Encuentre ejemplos de espacios deductivos que conmuten. Observe que los espacios deductivos triviales conmutan con cualquier otro. Muestre que los espacios deductivos inducidos por dos preordenes duales conmutan, si además el preorden es total entonces el espacio composición es el caótico. $(\star\star\star)$

Ejercicio 10.10. Pruebe que ser compuesto es un eidos. Suponga que un espacio deductivo compuesto es además compatible con τ. ¿Cada espacio deductivo de su descomposición es compatible con τ? Haga la misma pregunta pero intecambiando τ por ε. $(\star\star\star\star)$

Reflexión Final

Al mirar retrospectivamente uno nota que las motivaciones iniciales quedan opacadas por el propio desarrollo teórico, y se da cuenta de que el concepto de clausura como generador de estructura es una herramienta poderosa y presente en muchísimos contextos. Definiciones y resultados cruzan fronteras aquí como si no existiesen y conectan de una manera intensa ideas y estructuras antes bien separadas como el álgebra, la topología y la teoría del orden. Por supuesto que ya han trabajado juntas estas teorías, pero uno esta consciente de cuando se está enteramente en una de ellas al trabajar; aquí sin embargo hemos difuminado las fronteras y encontrado un lenguaje común y una relación íntima entre ellas. Aún más, hemos encontrado un «mapa» visual y matemático que orienta las interacciones entre dichas ramas: el diagrama fundamental.

Cuando veo el diagrama, me invade una sensación de armonía, tal es así que cuando trabajo con otros conceptos o en otros ámbitos trato de mirar a través de la teoría deductiva y siempre allí se aparece una clausura para iluminar mi entendimiento y los conceptos obscuros ceden rápidamente ante la intuición que esta perspectiva induce en mi.

Antes de despedirme, dejo el siguiente problema, central en teoría deductiva:

Problema (del Teorema de Enlace). *Supongamos que tenemos cierto espacio deductivo* (α, δ) *y un traductor* $\varphi : ded \to \Phi$. *Nos preguntamos: ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que* (α, δ) *sea compatible con* φ*? Este problema general ya fue respondido en el caso de los traductores* τ *y* ε. *En los cuales se dio dos resultados de este tipo mediante el* τ*-Teorema y* ε*-Teorema. Nos interesa como problema abierto el mismo interrogante pero para los demás traductores. A este tipo de resultado los llamaremos «teorema de enlace» entre las teorías respectivas. Respuestas a este problema permiten un entendimiento más profundo de las teorías en cuestión.*

Glosario de Símbolos

$(\alpha, \delta), (\beta, \gamma)$ - Espacios Deductivos.
α, β - Conjuntos ambiente de espacios deductivos.
δ, γ - Deductores de espacios deductivos.
δ_S - Deductor relativo a S.
$\delta_{[\alpha]}, \gamma_{[\beta]}$ - Funciones Clausura.
Λ - Conjunto de índices de cardinalidad arbitraria.
$\mathcal{P}(\alpha)$ - Conjunto potencia de α.
$\emptyset$ - Conjunto vacío.
$[\varphi]_\alpha$ - Conjunto inducido por φ sobre α. ($\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ es una función)
$[\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]_\alpha$- Deductor inducido por la familia de conjuntos $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ donde cada $S_\lambda \subseteq \alpha$.
$[[\lambda]]_\alpha$ - Completación minimal de λ en α.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ - Respectivamente: Los números naturales (con el cero), los números enteros, los números reales.
n - Un número natural arbitrario.
k - Un cardinal arbitrario.
f^n - Composición de la función f consigo misma n veces.
$\times$ - Producto cartesiano.
$\leq$ - Una relación de preorden.
$[Id]_\alpha$ - Deductor discreto sobre α.
$[\alpha]_\alpha$ - Deductor caótico sobre α.
φ, ψ - Funciones $\varphi : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$, generalmente funciones clausura.
$\Omega(\alpha, \delta)$ - Soporte del espacio deductivo (α, δ) (Familia de todos los subespacios deductivos de (α, δ))
$\nabla(\alpha, \delta)$ - Familia de τ-abiertos del espacio deductivo (α, δ).
$\mathcal{N}_x^\tau$ - Familia de τ-entornos de x.
$\overset{\delta}{\approx}$ - Cociente natural proveniente del deductor δ.
$[\alpha]^\delta$ - Espacio asociado.
ξ - Ergomorfismo.
A^c - Complemento de A (si el ambiente es α, $A^c = \alpha \setminus A$)
$\mathbb{D}_\alpha^\tau$ - Campo deductivo topológico de α.
$\mathbb{T}_\alpha$ - Campo topológico de α.
$\delta^\emptyset$ - Destilación del deductor δ.
δ_α^k - k-Constructor del espacio deductivo (α, δ).
$\#(\alpha, \delta)$ - Orden del espacio deductivo (α, δ)

Índice alfabético

Bibliografía

[1] *Notas del curso de Introducción a la Topología* - Beatriz Abadie - 2013 - Uruguay

[2] *Notas del curso de Álgebra I* - Mariana Haim - 2011 - Uruguay

[3] *Álgebra I* - Armando O. Rojo

[4] *Análisis Matemático* - J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

[5] *How to write mathematics* - Paul R. Halmos

[6] *Escribir en la universidad* - Renata Dessau